

**Московский государственный авиационный институт
(технический университет)**

На правах рукописи

Петухов Вячеслав Георгиевич

УДК 629.78

**Оптимизация траекторий и эволюция движения космических
аппаратов с двигательными установками малой тяги**

Специальность 05.07.09 – динамика, баллистика, и
управление движением летательных аппаратов

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
д.т.н., проф. Константинов М.С.

Москва 1996 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Основные обозначения	5
Введение	7
1. Методы оптимизации траекторий с малой тягой	14
1.1. Метод продолжения для определения оптимальных решений. Особенности продолжения решений для модели идеально регулируемой двигательной установки в решения для модели двигательной установки с постоянной скоростью истечения	18
1.2. Численные решения	25
1.2.1. Идеально регулируемая двигательная установка	25
1.2.2. Сравнение решений для моделей идеально регулируемой двигательной установки и двигательной установки с постоянной скоростью истечения	32
1.2.3. Оптимизация траекторий в случае постоянной скорости истечения	35
1.3. Задача оптимизации траектории в случае зависимости реактивной мощности идеально регулируемой двигательной установки от фазовых координат и времени	38
1.4. Продолжение оптимальных решений по основным баллистическим параметрам	41
1.5. Априорный выбор экстремали для определения базовой оптимальной траектории космического аппарата с идеально регулируемой двигательной установкой	46
1.6. Переопределение функции порогового значения в процессе продолжения	54
1.7. Оптимизация перелетов с постоянной тягой за фиксированное время	59
1.8. Задача об оптимальном по быстродействию перелете	66

2. Эволюция орбит космического аппарата в двукратно осредненной задаче Хилла под влиянием малого трансверсального ускорения	73
2.1. Эволюционные уравнения и их редукция	78
2.2. Частные решения	82
2.2.1. Плоская задача	82
2.2.2. Круговые орбиты	82
2.2.3. Полярные орбиты	83
2.3. Качественное исследование движения по полярным орбитам	84
2.4. Эволюция движения космического аппарата по около- круговым орбитам	88
2.4.1. Линеаризация	88
2.4.2. Решение со стационарным значением аргумента перицентра	89
2.4.3. Решение с критическим наклоном	90
2.4.4. Решения с наклоном меньше критического	90
2.4.5. Решения с наклоном больше критического	91
2.4.6. Анализ результатов	92
2.5. Область применимости решений двукратно осредненной задачи	93
2.6. Численные результаты	96
3. Анализ проекта космического аппарата с ядерной электро- ракетной установкой для исследования Юпитера	102
3.1. Комбинированная схема перелета с использованием разгонного блока с двигательной установкой большой тяги для выведения на гелиоцентрическую орбиту	103
3.2. Схема перелета с участком спиральной раскрутки вокруг Земли	111

Выводы	123
Литература	125

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

ДТКЗ	= двухточечная краевая задача
ИР	= относящийся к модели идеально регулируемого двигателя
КА	= космический аппарат
ОКЗТТ	= ограниченная круговая задача трех тел
ПСИ	= относящийся к модели двигателя с постоянной скоростью истечения
a	= вектор реактивного ускорения
<i>a</i>	= величина реактивного ускорения
<i>a</i>	= большая полуось
b	= вектор начальных невязок
<i>e</i>	= эксцентриситет
e	= единичный вектор ориентации реактивной тяги
f	= вектор граничных условий на правом конце
<i>i</i>	= наклонение орбиты
<i>J</i>	= функционал
<i>k</i>	= параметр нормировки
<i>m</i>	= текущая масса КА
<i>M</i>	= средняя аномалия КА
<i>m_i</i>	= масса <i>i</i> -го притягивающего центра
<i>m_k</i>	= конечная масса КА
<i>m₀</i>	= масса КА в начале гелиоцентрического участка полета
<i>N</i>	= реактивная мощность
<i>N_{rev}</i>	= целое число витков
<i>p</i>	= фокальный параметр
<i>P</i>	= реактивная тяга
<i>p_m</i>	= сопряженная к массе КА переменная

$\mathbf{p}_v$	= сопряженный вектор (базис-вектор Лоудена)
r	= удаление КА от притягивающего центра
T	= продолжительность перелета
t	= текущее время
t_0	= начальное время
$\mathbf{v}$	= вектор скорости КА
V_∞	= начальный гиперболический избыток скорости КА
w	= скорость истечения
$\mathbf{x}$	= вектор положения КА
$\mathbf{z}$	= вектор неизвестных параметров ДТКЗ, $\mathbf{z}^T = (\mathbf{p}_{v0}^T, d\mathbf{p}_{v0}^T/dt)$
μ	= гравитационный параметр притягивающего центра
μ	= массовый параметр в ограниченной задаче трех тел
v	= истинная аномалия КА
τ	= параметр продолжения
ω	= аргумент перицентра
Ω	= силовая функция гравитационного поля
Ω	= долгота восходящего узла
ε	= ступенчатая функция управления
ε_t	= функция тени
ψ	= функция переключения
σ	= функция порогового значения
η_i	= к.п.д.
φ_i	= функции продолжения

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются вопросы, связанные с траекторной оптимизацией и эволюцией управляемого движения космических аппаратов (КА) с двигательными установками малой тяги. Анализируется широкий спектр вопросов, касающихся оптимизации движения центра масс КА и эволюции орбит под совместным влиянием малой тяги и гравитационных возмущений. Большое внимание уделяется методам оптимизации траекторий, чему посвящена первая глава работы.

Основные усилия в этом направлении были направлены на регуляризацию процесса решения краевых задач оптимального управления. Методы оптимизации условно делятся на две крупные категории: прямые методы минимизации критерия качества (функционала) и непрямые, связанные с использованием необходимых (а в ряде случаев - и достаточных) условий оптимальности [7, 9, 13, 14, 23, 24, 35, 38, 46, 57, 59, 67, 69, 73, 100, 105]. Не обсуждая достоинства и недостатки методов этих двух категорий - тем более, что существует большое количество комбинированных методов - отметим, что непрямые методы, в общем случае, позволяют решать более сложные задачи по сравнению с прямыми при использовании одинаковых вычислительных ресурсов. Это связано с существенным ростом числа неизвестных параметров при усложнении задачи (оптимизация многовитковых траекторий, траекторий с большим диапазоном расстояний от притягивающего центра и т.д.) в случае использования прямых методов, тогда как при использовании непрямых методов число неизвестных параметров не изменяется или возрастает незначительно. Применение принципа максимума Л.С.Понтрягина [54] позволяет свести оптимизационную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой и составляет основную трудность при использовании непрямых методов.

Трудности решения таких краевых задач носят принципиальный характер, связанный с вопросами существования и ветвления решений. Однако, большинство численных методов вносят свои - методические - ограничения, не имеющие непосредственного отношения к свойствам математической задачи. Так, область сходимости практически всех численных методов существенно меньше области притяжения конкретной экстремальной точки в пространстве неизвестных параметров краевой задачи.

Методические сложности связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости численных методов решения, а в некоторых случаях - например при использовании ряда прямых методов оптимизации - с большой размерностью задачи. Трудности, связанные с реализацией прямых методов, вызваны общими проблемами построения эффективных алгоритмов нелинейного программирования [27, 46, 67, 68] и во многих задачах траекторной оптимизации оказываются настолько значительными, что большое число авторов предпочитает использовать не прямые методы оптимизации.

Традиционно для решения задач оптимизации траекторий КА с двигательными установками малой тяги используются различные модификации метода Ньютона [4, 9, 13, 14, 23, 38, 48, 65, 66, 98, 105]. Основной трудностью при использовании этого класса методов является определение начального приближения, достаточно близкого к оптимальному решению, что связано с ограниченностью области сходимости этих методов и с неисследованностью конфигурации этой области в многомерном пространстве параметров оптимизационной задачи. Практически не разработано достаточно универсальных алгоритмов определения начальных значений этих параметров для обеспечения сходимости методов типа Ньютона. Несмотря на

многочисленные попытки, решение этой задачи остается, по существу, интуитивным (неформализованным).

Известен ряд работ [4, 13, 23, 108], посвященных использованию импульсного решения в качестве начального приближения при решении задачи оптимизации траекторий КА с двигательной установкой малой тяги.

В работах [13, 23, 108] краевая задача оптимизации траекторий КА с двигательной установкой постоянной скорости истечения решается с помощью "дискретного варианта метода продолжения типа предиктор-корректор". Параметром продолжения является величина, обратная начальному реактивному ускорению, равная на импульсном решении нулю. На первом этапе определяется импульсное решение и зависимость базис-вектора Лоудена [42] от времени на этом решении. Затем делается шаг по параметру продолжения (предиктор), и для нового значения этого параметра решается краевая задача с помощью квазиньютоновского метода Бройдена (корректор), причем начальным приближением параметров краевой задачи для метода Бройдена являются значения этих параметров, полученные с помощью линейной или квадратичной экстраполяции предыдущих значений параметров продолжения. Для определения величины шага по параметру продолжения предлагается пользоваться интуитивным методом ("методом проб", [13, стр.159]). В [13] отмечена возможность использования для решения метода дифференцирования по параметру [45, 46, 68, 104, 106, 107], однако сам метод применительно к рассматриваемой задаче не расписан и не реализован; более того, ставится под сомнение рациональность его численной реализации.

В первой главе настоящей работы рассматривается возможность построения эффективного непрямого метода оптимизации траекторий КА

с двигательной установкой малой тяги, основанного на методе продолжения, а точнее - на методе дифференцирования по параметру. Основной целью предлагаемого метода является регуляризация процесса решения краевой задачи, вытекающей из принципа максимума Л.С.Понтрягина, включая проблему выбора начального приближения. Основные идеи, стимулировавшие разработку этого метода, заключались в следующем:

- Решение задачи оптимизации траектории КА с идеально регулируемой двигательной установкой всегда существует, так как не наложено каких-либо ограничений на управление - вектор реактивного ускорения. Для определения семейства оптимальных траекторий, генерируемого гладким изменением краевых условий можно построить алгоритм продолжения, регулярный всюду кроме точек ветвления (бифуркации) оптимальных решений. Поэтому траекторию, соответствующую любому начальному приближению общего вида можно гладко продолжить до какой-либо оптимальной траектории, принадлежащей общему с начальным приближением семейству. Для регуляризации продолжения в окрестности бифуркационных точек необходимо построение специальных алгоритмов.
- Решение задачи траекторной оптимизации для КА с идеально регулируемой двигательной установкой можно использовать в качестве начального приближения в методе продолжения для решения аналогичной задачи для КА с двигательной установкой постоянной скорости истечения.
- Возможно использование различных вариантов метода продолжения для построения семейства оптимальных решений при гладком изменении основных проектных параметров КА.

В результате применения и развития метода продолжения по параметру, в работе получен практически регулярный численный метод решения задач оптимизации траекторий КА с идеально регулируемой двигательной установкой малой тяги. Разработаны новые методы решения задач траекторной оптимизации КА с двигательной установкой постоянной скорости истечения (в случае постоянного реактивного ускорения или постоянной тяги), включая задачу об оптимальном по быстродействию перелете и задачу о перелете с фиксированным временем. Разработаны модификации метода продолжения для продолжения решения задач по основным исходным баллистическим параметрам и для случая зависимости реактивной мощности от фазовых координат КА. В целях определения различных экстремалей задачи оптимального управления и борьбы с отказами метода при прохождении в окрестности точек ветвления решений, был разработан специальный метод, включающий продолжение по величине гравитационного параметра центрального тела. В целом, совокупность разработанных численных методов позволяет решать разнообразные задачи траекторной оптимизации КА как с идеально регулируемой двигательной установкой, так и с двигателями постоянной скорости истечения без наличия какой-либо априорной информации о неизвестных параметрах краевой задачи. В этом смысле, рассматриваемые методы регулярны. Более того, задача об оптимальном перелете КА с идеально регулируемой двигательной установкой малой тяги решается практически регулярно. Это означает, что решение можно получить для любой задачи в случае достаточно малых вычислительных ошибок (следует сделать оговорку, что если искомая оптимальная траектория лежит в окрестности бифуркационной точки, то возможны отказы метода).

Большинство вариантов разработанных методов были реализованы в виде программно-математического обеспечения, которое позволило решить большое количество прикладных задач траекторной оптимизации [22, 80, 83, 84, 85, 90, 92, 102], получить опыт использования этих методов и оценить перспективы их усовершенствования. В работе представлен ряд численных примеров, полученных с помощью упомянутого программно-математического обеспечения и направленных, в первую очередь, на демонстрацию особенностей практического использования разработанных методов.

Вторая глава работы связана с изучением эволюции управляемого движения КА под совместным влиянием малой реактивной тяги и возмущающей гравитационной силы, обусловленной притяжением удаленного небесного тела. Для анализа орбитальной эволюции КА используется модель предельного варианта ограниченной круговой задачи трех тел - задачи Хилла. Применение известных в небесной механике классических методов исследования к задачам полета КА с двигательной установкой малой тяги позволило получить ряд новых результатов, к числу которых можно отнести:

- редукцию эволюционных уравнений движения КА с малым трансверсальным реактивным ускорением в рамках модели задачи Хилла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка [51, 52];
- определение и анализ частных точных решений этих уравнений для случаев плоского движения, движения по круговым орбитам и по произвольным полярным орбитам [52];
- определение и анализ приближенных решений этих эволюционных уравнений для случая слабоэллиптических орбит [103].

Основной прикладной задачей, с которой связано проведенное исследование эволюции движения, является спиральная раскрутка (скрутка) КА с двигательной установкой малой тяги вокруг естественных спутников планет.

В третьей главе работы приводится пример анализа с помощью разработанных методов проекта межпланетного КА, предназначенного для исследования Юпитера и его естественных спутников.

1. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КА С МАЛОЙ ТЯГОЙ

Рассматриваются две традиционные математические модели движения КА с малой тягой [14, 97]. В рамках первой модели допускается, что величина реактивной тяги может произвольно изменяться при условии, что мощность реактивной струи ограничена (модель идеально регулируемой двигательной установки, или ИР-модель). При использовании этой модели задача оптимизации траектории (динамическая задача) оказывается независимой от параметрической задачи массовой оптимизации КА [14]. Вторая математическая модель предполагает постоянство тяги или реактивного ускорения (модель двигательной установки с постоянной скоростью истечения, или ПСИ-модель). В этом случае задача не разделяется на динамическую и параметрическую [14], и процесс траекторной оптимизации приходится повторять при каждом изменении основных проектных параметров КА. К сожалению, возможности регулирования тяги часто сильно ограничены, поэтому вторая модель является более реалистичной.

Тем не менее ИР-модель представляет самостоятельный интерес, так как, во-первых, дает нижнюю оценку требуемой массы топлива КА без предварительного выбора проектных параметров КА. Во-вторых, современные электроракетные двигатели позволяют регулировать в некоторых пределах скорость истечения и тягу (в 2-4 раза для стационарных плазменных двигателей серии М100-М290 [76]). Во-третьих, можно показать, что ИР-решения дают приемлемую во многих случаях оценку для ПСИ-решений. И, наконец, существует возможность использовать ИР-решения в качестве начального приближения в алгоритмах продолжения для определения ПСИ-решений.

Формализация (математическая постановка) задачи траекторной оптимизации достигается более или менее просто применением принципа максимума Л.С.Понтрягина [54]. Как известно, принцип максимума приводит к необходимости решения краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Традиционно для решения таких краевых задач используются различные варианты методов типа Ньютона, главным недостатком которых является малая область сходимости. Для обеспечения сходимости таких методов проблема выбора начального приближения для вектора неизвестных параметров краевой задачи является наиболее принципиальной.

Существующие численные методы не снимают этого вопроса, так как фактически, они приспособлены для оптимизации только некоторых, весьма ограниченных, классов траекторий. С другой стороны, известны по крайней мере два типа задач траекторной оптимизации, для которых решение (неединственное) в общем случае существует - это ИР-задача и ПСИ-задача об оптимальном по быстродействию перелете. Следовательно, логично допустить принципиальную возможность конструирования такого численного метода, который бы всегда приводил к определению какой-либо экстремали такой задачи оптимизации, при произвольных начальных значениях неизвестных параметров краевой задачи. Это явилось побудительной причиной для рассмотрения возможности построения регулярных методов решения краевых задач траекторной оптимизации. Кандидатом в такие методы рассматривается метод продолжения (метод дифференцирования по параметру). В работе рассматривается ряд вариантов этого метода, предназначенных для решения различных задач. Полученные результаты позволяют утверждать, что для ИР-задачи разработан практически регулярный метод решения.

Сущность рассматриваемого варианта метода продолжения заключается в следующем. Во-первых, исследуемая задача погружается в некоторое однопараметрическое семейство, причем зависимость дифференциальных уравнений и краевых условий от параметра этого семейства (параметра продолжения) выбирается такой, что при нулевом его значении задача представляет собой либо задачу о пассивном движении КА, либо ранее решенную оптимизационную задачу, а при значении параметра, равном единице - задачу, решение которой необходимо найти. Далее формируется система дифференциальных уравнений метода продолжения для определения неизвестных параметров краевой задачи, с параметром продолжения, используемым в качестве независимой переменной. Начальные условия этой системы определяются из известного решения задачи при нулевом значении параметра продолжения, а значения зависимых переменных при равной единице величине параметра продолжения являются решением искомой краевой задачи в силу этих дифференциальных уравнений.

На основе разработанных вариантов метода продолжения по параметру было реализовано программное обеспечение для оптимизации межпланетных перелетов КА с малой тягой. Это программное обеспечение позволяет

1. Определять ИР-оптимальные траектории КА при отсутствии какой-либо априорной информации о значении неизвестных параметров двухточечной краевой задачи (ДТКЗ). Как правило, для определения базовых оптимальных траекторий КА используется нулевое начальное приближение для вектора неизвестных параметров краевой задачи. Для получения пучка оптимальных траекторий в некотором параметрическом пространстве в качестве начального

приближения для параметров ДТКЗ используется значения этих параметров на базовой оптимальной траектории.

2. Получать с помощью специально разработанного метода продолжения по гравитационному параметру различные экстремали ИР-задачи при нулевом начальном приближении для вектора неизвестных параметров краевой задачи.
3. Продолжать ИР-оптимальные решения в ПСИ-оптимальные решения.
4. Определять оптимальные решения задач межпланетного перелета КА с малой тягой в различных постановках, включая
 - 4.1. Задачи сопровождения планеты-цели;
 - 4.2. Задачи пролета;
 - 4.3. Задачи с фиксированным временем и задачи об оптимальном по быстродействию перелете;
 - 4.4. Задачи с комбинированием двигательных установок большой и малой тяги;
 - 4.5. Задачи об оптимизации движения КА с малой тягой в центральном ньютоновском гравитационном поле и в рамках модели ограниченной задачи трех тел;
 - 4.6. Задачи об оптимизации траекторий КА с зависящей от его фазовых координат и времени реактивной мощностью.

Разумеется, все многообразие представляющих практический интерес задач не может быть рассмотрено в одной работе. Так, не представлены задачи оптимизации межорбитальных перелетов, задачи об оптимальных перелетах КА со сбросом элементов конструкции в процессе движения, многопролетные задачи, задачи траекторной оптимизации КА с двигательной установкой ограниченной (не постоянной) скорости истечения, КА с комбинированной энергодвигательной установкой и т.д.

Некоторые из этих задач анализировались в работах [22, 80, 83-85, 90, 92, 102], в том числе и с применением представленных в этой части численных методов.

1.1. Метод продолжения для определения оптимальных решений. Особенности продолжения решений для модели идеально регулируемой двигательной установки в решения для модели двигательной установки с постоянной скоростью истечения

Рассмотрим возможности применения метода продолжения для численного решения задачи оптимального управления движением КА в рамках ИР- и ПСИ-моделей [84, 102]. Предполагается, что КА движется в некотором гравитационном поле с силовой функцией Ω . Уравнения движения центра масс КА в инерциальных декартовых координатах имеют вид:

$$d^2\mathbf{x}/dt^2 = \Omega_{\mathbf{x}} + \varepsilon\mathbf{a}, \quad (1.1.1)$$

где $\mathbf{x}=(x, y, z)^T$ - вектор положения КА, $\mathbf{a}$ - вектор реактивного ускорения, ε - ступенчатая функция управления ($\varepsilon = 1$ при наличии тяги, иначе $\varepsilon = 0$). Предполагается, что переменные представлены в безразмерном виде, причем за единицу времени выбирается величина, обратная невозмущенному среднему движению КА по круговой орбите с радиусом, равным выбранной единице длины. Задача о перелете с минимальными затратами топлива сводится к задаче минимизации функционала [14, 97]

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \varepsilon \mathbf{a}^T \mathbf{a} dt \quad (1.1.2)$$

в случае ИР-задачи и

$$J = \int_0^T \varepsilon a dt, \quad (1.1.3)$$

в случае ПСИ-задачи. Здесь T - продолжительность перелета и $a = |\mathbf{a}|$. Предполагается, что продолжительность перелета фиксирована.

Реактивное ускорение в случае ПСИ-задачи в данном разделе предполагается постоянным: $a = \text{const}$.

Задача оптимального управления сводится к ДТКЗ с помощью принципа максимума Понтрягина [54]. Оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v, \varepsilon \equiv 1 \quad (1.1.4)$$

в ИР-задаче и

$$\mathbf{a} = a\mathbf{p}_v/p_v, \varepsilon = \varepsilon(p_v - 1) = \begin{cases} 1, & \mathbf{p}_v > 1, \\ 0, & \mathbf{p}_v \leq 1 \end{cases} \quad (1.1.5)$$

в ПСИ-задаче, где $p_v = |\mathbf{p}_v|$. Сопряженный вектор $\mathbf{p}_v$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d^2\mathbf{p}_v/dt^2 = \Omega_{xx} \mathbf{p}_v.$$

Граничные условия (включая условия трансверсальности) завершают формулировку ДТКЗ. Например, рассмотрим задачу оптимизации гелиоцентрического участка межпланетного перелета. Начальные условия при $t=0$ имеют вид [4]:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, d\mathbf{x}(0)/dt = \mathbf{v}_0 + V_\infty \mathbf{p}_v/p_v, \quad (1.1.6)$$

а при $t = T$:

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, d\mathbf{x}(T)/dt = \mathbf{v}_k \quad (1.1.7)$$

в случае сопровождения планеты-цели (встречи с выравниванием гелиоцентрических скоростей КА и планеты) и

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_k, \mathbf{p}_v(T) = 0 \quad (1.1.8)$$

в случае пролета планеты, где V_∞ - начальный гиперболический избыток скорости при выходе КА из сферы действия планеты старта.

Используем основные идеи метода продолжения по параметру [68] для решения рассматриваемых ДТКЗ. Уравнения оптимального движения КА в общем случае, объединяющем ИР- и ПСИ-задачи, могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \Omega_{\mathbf{x}} + \varphi_1(\tau)\mathbf{p}_v + \varphi_2(\tau)\frac{a\varepsilon}{p_v}\mathbf{p}_v, \\ \ddot{\mathbf{p}}_v &= \Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_v, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

где $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ - функции продолжения. Уравнения (9) преобразуются в уравнения ИР-оптимального движения, если $\varphi_1(\tau) \equiv 1$, $\varphi_2(\tau) \equiv 0$:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_v, \\ \ddot{\mathbf{p}}_v &= \Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_v, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.10)$$

и в уравнения ПСИ-оптимального движения, если $\varphi_1(\tau) \equiv 0$, $\varphi_2(\tau) \equiv 1$:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \Omega_{\mathbf{x}} + \frac{a\varepsilon}{p_v}\mathbf{p}_v, \\ \ddot{\mathbf{p}}_v &= \Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_v, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

В частности, если рассматривается продолжение ИР-решения в ПСИ-решение, то функции продолжения должны удовлетворять дополнительным условиям: $\varphi_1(0)=1$, $\varphi_2(0)=0$, $\varphi_1(1)=0$, $\varphi_2(1)=1$. Для решения ДТКЗ необходимо решить уравнение

$$\mathbf{f}(T, 1, \mathbf{p}_{v0}, \dot{\mathbf{p}}_{v0}) = 0, \quad (1.1.12)$$

относительно неизвестных начальных значений сопряженного вектора $\mathbf{p}_{v0}$ и его производной $\dot{\mathbf{p}}_{v0}$, где функция $\mathbf{f}(T, \tau, \mathbf{p}_{v0}, \dot{\mathbf{p}}_{v0})$ равна

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k \\ d\mathbf{x}(T)/dt - \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

для задачи сопровождения или

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{p}_v(T) \end{pmatrix} \quad (1.1.14)$$

для задачи пролета. Пусть $\mathbf{f}(T, 0, \mathbf{p}_{v0}(0), \dot{\mathbf{p}}_{v0}(0)) = \mathbf{b}$, где векторы $\mathbf{p}_{v0}(\tau)$, $\dot{\mathbf{p}}_{v0}(\tau)$ рассматриваются функциями параметра продолжения τ . Основное уравнение метода продолжения в этом случае имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\mathbf{f}_z^{-1}(\mathbf{z}) \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (1.1.15)$$

где $\mathbf{z}(\tau) = (\mathbf{p}_{v0}, \dot{\mathbf{p}}_{v0})^T$ - вектор неизвестных параметров ДТКЗ. Решением ДТКЗ является вектор $\mathbf{z}(1)$. Таким образом, определение решения ДТКЗ сводится к интегрированию системы (15) и единственным аналитическим препятствием для определения этого решения может служить вырожденность матрицы $\mathbf{f}_z$. Следует подчеркнуть, что вычисление правых частей (15) требует интегрирования уравнений движения КА.

Интересно отметить, что уравнение (15) приводит к методу Ньютона в случае, если эти уравнения интегрируются методом Эйлера. Большие потенциальные возможности метода продолжения по параметру заключаются в возможности использования более точных методов интегрирования. Так, автором были апробированы адаптивный метод Рунге-Кутты 8-го порядка (алгоритм DOPRI8 [88]) и метод Эверхарта 15-го порядка [82] (алгоритм RA15). Использование этих методов означает, что в процессе продолжения используются производные от параметров ДТКЗ по τ до 8-го или до 15-го порядка соответственно. Именно это объясняет существенное расширение области сходимости рассматриваемого метода по сравнению с методами типа Ньютона, использующими производные только первого порядка. Естественно, что высокая точность интегрирования уравнений (15) требует согласованной (более высокой) точности интегрирования уравнений движения КА. Для этой внутренней

задачи были опробованы алгоритм RA15 и высокоточный экстраполяционный алгоритм ODEX2 [88]. Наиболее оптимальным с точки зрения вычислительной эффективности оказалось использование алгоритма DOPRI8 для интегрирования системы (15) и алгоритма ODEX2 для интегрирования уравнений движения КА.

Для определения матрицы $\mathbf{f}_z$ и вектора $\mathbf{f}_\tau$ в (15) можно использовать конечные разности. Однако, точность вычисления производных конечно-разностным методом часто оказывается неудовлетворительной. Поэтому более предпочтительным оказывается вычисление $\mathbf{f}_z$ и $\mathbf{f}_\tau$ в процессе совместного интегрирования уравнений (9) и дифференциальных уравнений для вариаций фазового вектора и сопряженных переменных. Расширенная система дифференциальных уравнений (9) в этом случае принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \Omega_{\mathbf{x}} + \varphi_1(\tau) \mathbf{p}_v + \varphi_2(\tau) \frac{a\varepsilon}{p_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d^2 \mathbf{p}_v}{dt^2} &= \Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right) &= \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} + \varphi_1(\tau) \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{v0}} + \frac{a\varepsilon}{p_v} \varphi_2(\tau) \left[\mathbf{E} - \frac{1}{p_v^2} \mathbf{p}_v \mathbf{p}_v^T \right] \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{v0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{v0}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}_{v0}} + \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{p}_{v0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \right) &= \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \varphi_1(\tau) \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} + \frac{a\varepsilon}{p_v} \varphi_2(\tau) \left[\mathbf{E} - \frac{1}{p_v^2} \mathbf{p}_v \mathbf{p}_v^T \right] \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \mathbf{p}_v + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \frac{a\varepsilon}{p_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} + \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} \right) &= \Omega_{xx} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} + \varphi_1(\tau) \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} + \frac{a\varepsilon}{p_v} \varphi_2(\tau) \left[\mathbf{E} - \frac{1}{p_v^2} \mathbf{p}_v \mathbf{p}_v^T \right] \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{xx} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} + \Omega_{xx} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}}, \end{aligned} \right\}$$

где $\mathbf{E}$ - единичная матрица. Третье уравнение в (16) должно содержать член с частной производной от ступенчатой функции управления ε по $\mathbf{p}_{v0}$, а пятое - член с частной производной от ε по τ . Эти члены имеют множитель $\delta(p_v-1)$ (дельта-функция $\delta(p_v-1) = \infty$ при $p_v = 1$ и равна 0 в другом случае). Их можно учесть, если процесс интегрирования (16) прерывать всякий раз, когда выполняется условие $p_v = 1$ для того, чтобы изменить значения $d(\partial \mathbf{x} / \partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}) / dt$, $d(\partial \mathbf{x} / \partial \tau) / dt$ в каждой из этих внутренних точек. В самом деле, рассматриваемые уравнения можно записать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial e} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial e} \right) = \mathbf{f}_1 + \delta \frac{s}{p_v} \mathbf{f}_2, \quad (1.1.17)$$

где e обозначает τ или какой-либо компонент вектора $\mathbf{z}$, $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ - непрерывные функции, $s = \text{sign}(\dot{p}_v) \mathbf{p}_v^T (d\mathbf{p}_v / de)$ и $\mathbf{f}_2 = a \varphi_2(\tau) \mathbf{p}_v / p_v$. Пусть при некотором t_1 $p_v(t_1) = 1$. Из (17) следует

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial e} \right|_{t=t_1^+} = \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial e} \right|_{t=t_1^-} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\int_{t_1-\Delta t}^{t_1+\Delta t} \mathbf{f}_1 dt + \int_{t_1-\Delta t}^{t_1+\Delta t} \delta \frac{s}{p_v} \mathbf{f}_2 dt \right]. \quad (1.1.18)$$

Предельное значение первого интеграла равно 0. Для вычисления предела второго интеграла необходимо заменить переменную t , по которой производится интегрирование, на p_v : $dt = (1/s_t) dp_v$, где $s_t = \frac{1}{p_v} \mathbf{p}_v^T \dot{\mathbf{p}}_v$.

Окончательно, выражение (1.1.18) принимает вид

$$\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial e} \right|_{t=t_1^+} = \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial e} \right|_{t=t_1^-} + \frac{s}{s_t p_v} \mathbf{f}_2. \quad (1.1.19)$$

Соотношение (19) должно использоваться во всех внутренних точках траектории, где $p_v = 1$.

Начальные условия (6) должны быть расширены начальными условиями для частных производных фазового вектора и сопряженных переменных по параметрам ДТКЗ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{p}_{v_0}} &= \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v_0}} = \frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v_0}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \mathbf{p}_{v_0}} \right) = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{p}_{v_0}} \right) &= \frac{V_\infty}{p_{v_0}} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{p_{v_0}^2} \mathbf{p}_{v_0} \mathbf{p}_{v_0}^T \right), \quad \frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \mathbf{p}_{v_0}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v_0}} \right) = \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \tau} \right) = 0.\end{aligned}\tag{1.1.20}$$

Пусть решение ИР-задачи (10) известно: $\mathbf{p}_v(0) = \mathbf{p}_{v_0}^{\text{ИР}}$. Оно может быть получено методом продолжения по параметру, если проинтегрировать уравнение (15) для $\varphi_1(\tau) \equiv 1$, $\varphi_2(\tau) \equiv 0$. Пусть $\mathbf{p}_{v_0}(0) = \mathbf{p}_{v_0}^{\text{ИР}}$. Вектор $\mathbf{b}$ в этом случае равен 0. Уравнение (9) будет инвариантным относительно параметра k при использовании нормировки сопряженного вектора

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{p}_v^{\text{ИР}} / (k p_{v_0}^{\text{ИР}}),\tag{1.1.21}$$

если предположить, что

$$\varphi_1(\tau) = k p_{v_0}^{\text{ИР}} \cdot (1 - \tau), \quad \varphi_2(\tau) = \tau.\tag{1.1.22}$$

Выражения (21) и (22) имеют следующий смысл. Норма вектора $\mathbf{p}_{v_0}^{\text{ИР}}$ произвольна. Она существенно меньше 1 в задачах о перелетах КА с малой тягой. Это означает, что ступенчатая функция управления $\varepsilon \equiv 0$ в начале процесса продолжения, если $\mathbf{p}_v(0) = \mathbf{p}_{v_0}^{\text{ИР}}$. Процесс продолжения на этом начальном интервале изменения τ вырождается в процесс увеличения p_v и dp_v/dt . Этот интервал ограничен некоторым значением параметра продолжения τ_1 : $p_{v \max}(\tau_1) = \max_t p_v(t; \tau_1) = 1$. Таким образом, результат продолжения решения на этом интервале эквивалентен нормализации

$$\mathbf{p}_v = \mathbf{p}_v^{\text{ИР}} / p_{v \max}(\tau_1).\tag{1.1.23}$$

Для нормализации $\mathbf{p}_v$ в соответствии с (23) необходимо найти τ_1 и $p_{v \max}(\tau_1)$.

Это достаточно сложная задача, и она не является необходимой с точки

зрения конструирования алгоритма численного процесса продолжения. Более того, упрощенный вариант нормализации (21) имеет определенные преимущества по сравнению с нормализацией (23). Использование как (23), так и (21) позволяет исключить начальный непродуктивный интервал продолжения, но нормализация (21) позволяет также и выбрать число активных участков и их расположение на траектории КА в начале процесса продолжения при $\tau=0$. Эта возможность показана на рис. 1.1.1. На нем приведена зависимость p_v от времени для ИР-модели. В начале процесса продолжения существуют два активных участка при $k=k_0=1$ (от t_3 до t_4 и от t_5 до T). В начале траектории расположен пассивный участок. При $k=k_1$ существует единственный активный участок (от t_6 до t_7). Два активных участка (от 0 до t_1 и от t_2 до T) существуют при $k_2<1$, однако начальный пассивный участок в этом случае отсутствует.

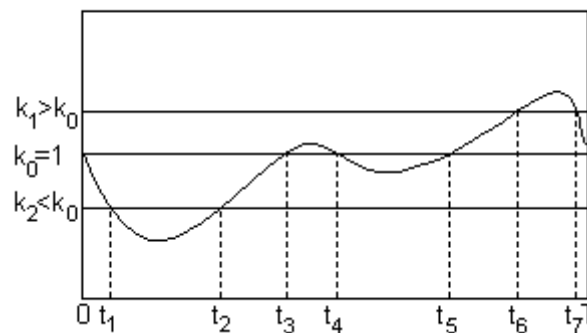


Рис.1.1.1. Использование параметра k для выбора числа активных участков.

1.2. Численные примеры

1.2.1. Идеально регулируемая двигательная установка

На рис. 1.2.1 приведены примеры ряда ИР-оптимальных траекторий, полученных на разработанном программном обеспечении с использованием рассмотренных численных методов [102]. Все

траектории были получены с использованием нулевого начального приближения для вектора неизвестных параметров краевой задачи при определении базовой оптимальной траектории и с помощью последующего продолжения решения по времени перелета и по положению КА на конечной орбите. Для определения оптимальной траектории с некоторыми фиксированными значениями проектно-баллистических параметров, отличными от соответствующих параметров на базовой траектории, за начальное приближение для вектора $\mathbf{z}_0$ принималось значение этого вектора на базовой траектории. Первые две траектории (рис. 1.2.1а и 1.2.1б) представляют две различные экстремали решения одной и той же задачи оптимального управления. На рис. 1.2.1в представлен пример многовитковой оптимальной траектории, а на рис. 1.2.1г - пример перехода с эллипса на гиперболу. Рис. 1.2.1д и 1.2.1е представляют экзотические оптимальные траектории КА, на которых изменяется направление его движения.

Следующие примеры более реалистичны. Рассматриваются задачи сопровождения Плутона и Меркурия. Предполагается, что КА выводится на некоторую гиперболическую геоцентрическую орбиту двигательной установкой большой тяги (более конкретно, используется РН Протон и разгонный блок Д [44]). Предполагается, что двигательная установка малой тяги работает только на гелиоцентрическом участке траектории КА, который и необходимо оптимизировать. Внешние параметры ДТКЗ (дата старта t_0 и гиперболический избыток скорости V_∞) также оптимизируются.

Продолжительность перелета и мощность реактивной струи предполагаются заданными. Все результаты получены также при $\mathbf{z}_0(0)=0$. При расчете базовой оптимальной траектории гиперболический избыток скорости полагался нулевым, а дата старта

фиксировалась. Оптимизация этих параметров проводилась путем продолжения по ним решения и анализа поведения функционала на пучке траекторий, порожденном базовой оптимальной траекторией. Некоторые результаты оптимизации приведены в табл. 1.2.1 и на рис. 1.2.2-1.2.4.

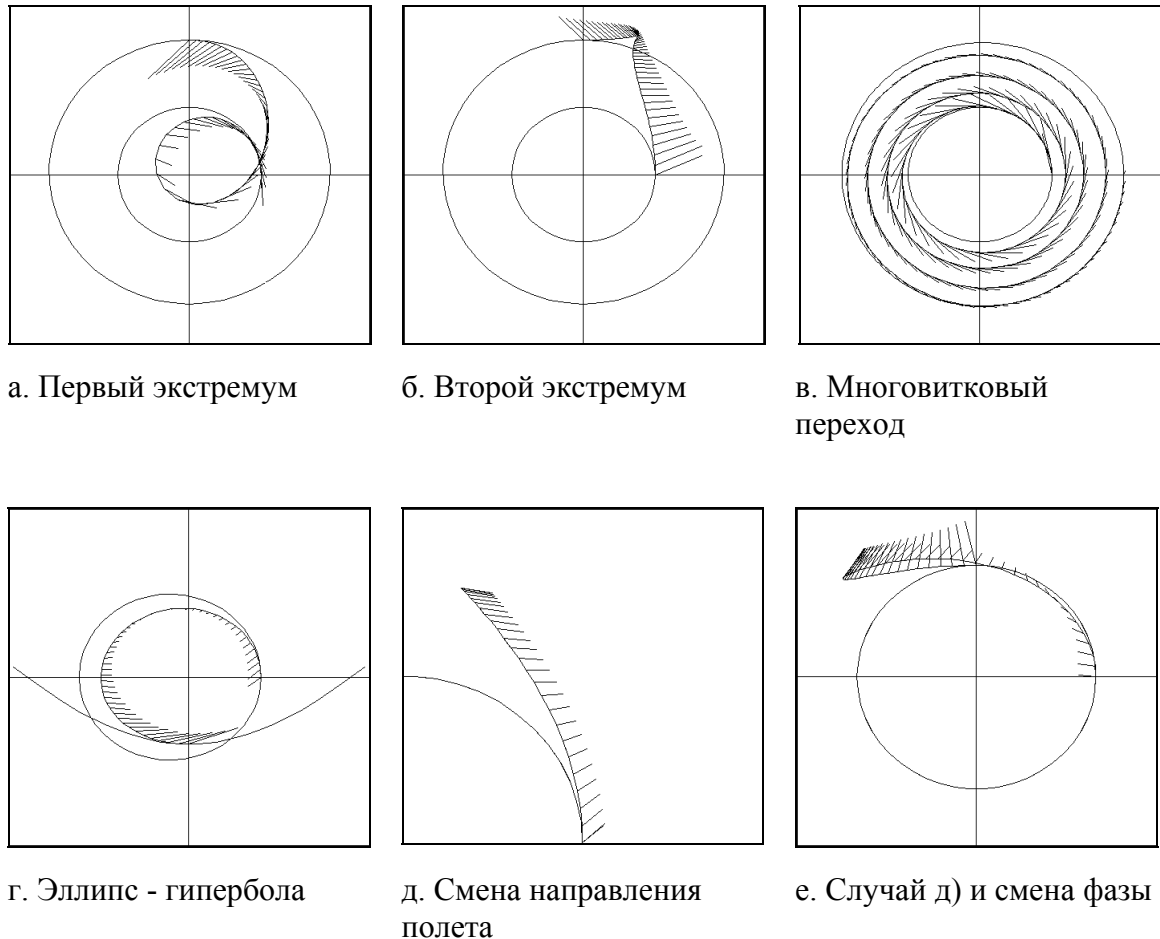


Рис. 1.2.1. Примеры ИР-оптимальных траекторий

Рис. 1.2.2 представляет ИР-оптимальную траекторию сопровождения Плутона и зависимость реактивного ускорения от времени. Штрихи вдоль траектории обозначают величину и направление реактивного ускорения. Интервал между соседними штрихами равен 30 суткам. ИР-оптимальная траектория сопровождения Меркурия показана на рис. 1.2.3 (интервал между соседними штрихами - 4 суток), а соответствующая зависимость реактивного ускорения от времени - на рис. 1.2.4.

Таблица 1.2.1

ИР-оптимальные перелеты к Плутону и Меркурию

Параметр	Сопровождение Плутона	Сопровождение Меркурия
Дата запуска	10.01.2000	15.08.2001
Время перелета [сут]	4500	1600
$\mathbf{x}(0)$ [а.е.]	(-0.32088, 0.92956, 0)	(0.80085, -0.62004, 0)
$d\mathbf{x}(0)/dt$ [а.е./сут]	(-0.016543, -0.005678, 0)	(0.010252, 0.013540, 0)
$\mathbf{x}(T)$ [а.е.]	(2.83018, -31.93666, 2.37474)	(-0.28105, -0.35790, 0.00337)
$d\mathbf{x}(T)/dt$ [а.е./сут]	(0.003164, -0.000343, -0.000889)	(0.016426, -0.016072, -0.002820)
$\mathbf{p}_v(0)$ [мм/с ²]	(-0.192371, -0.065533, 0.005084)	(0.358371, -0.138241, -0.115369)
$d\mathbf{p}_v(0)/dt \times 10^3$ [(мм/с ²)/сут]	(0.960650, -2.787335, 0.202574)	(3.06483, -1.60851, 1.59627)
$2J$ [м ² /с ³]	5.58456	2.99175
Конечная масса КА [кг]	3770	4503
Начальная масса КА [кг]	5807	
V_∞ [м/с]	1800	
Мощность струи [кВт]	30	

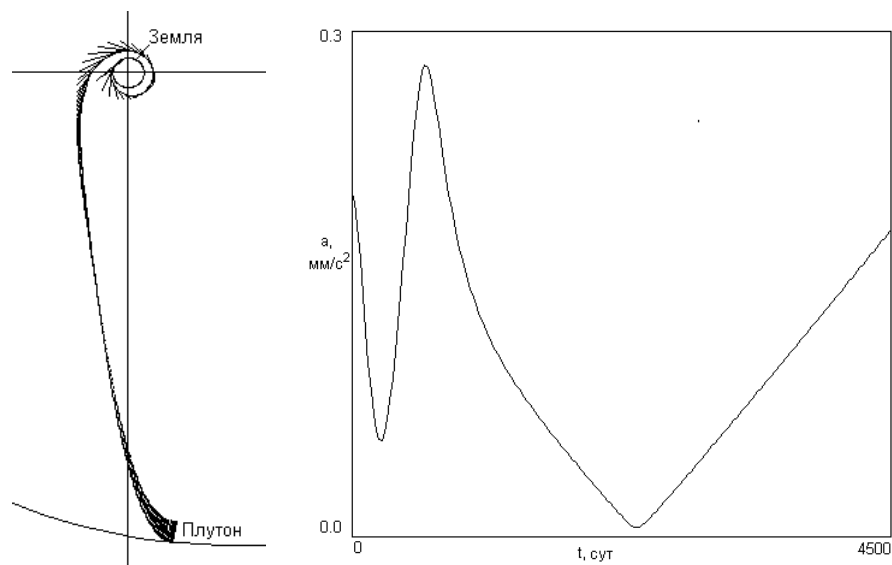


Рис. 1.2.2. ИР-оптимальная траектория сопровождения Плутона и зависимость реактивного ускорения от времени.

Следующий пример показывает неединственность оптимального решения. Рассматривается гелиоцентрический участок траектории сопровождения Плутона. Предполагается, что $V_\infty = 0$. На рис. 1.2.5 представлены три типа

ИР-оптимальных траекторий, которые отличаются числом целых витков (0, 1, и 2).

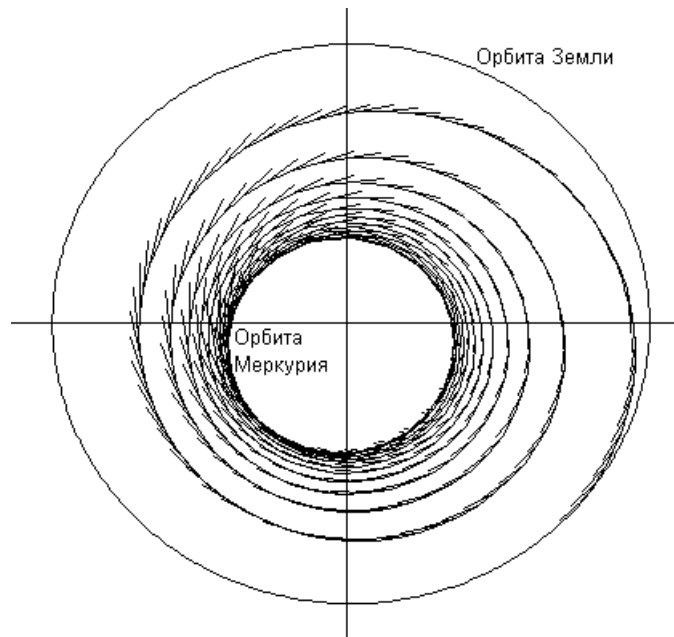


Рис. 1.2.3. ИР-оптимальная траектория сопровождения Меркурия

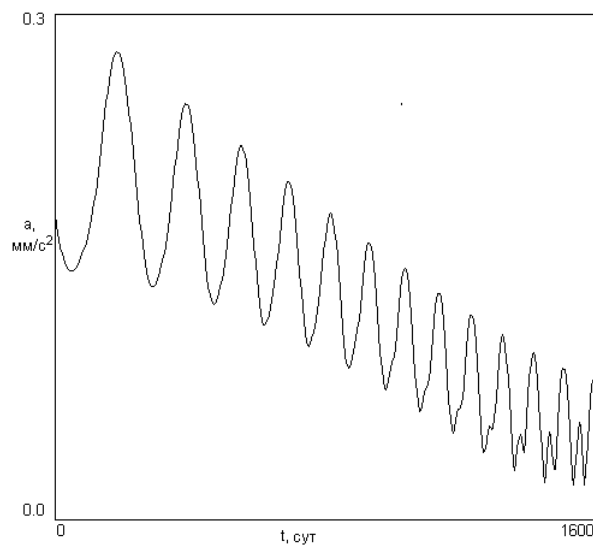


Рис. 1.2.4. Зависимость реактивного ускорения от времени (сопровождение Меркурия).

Соответствующие зависимости реактивного ускорения от времени показаны на рис. 1.2.6. Зависимости функционала от продолжительности перелета для всех трех типов траекторий представлены на рис. 1.2.7. Из этого рисунка видно, что первый тип ИР-оптимальной траектории с

угловой дальностью менее 360° является глобально-оптимальным при продолжительности перелета T , не превышающей 3760 суток. Если T находится в интервале от 3760 до 5330 суток, то минимальный функционал соответствует второму типу траекторий (угловая дальность от 360° до 720°). Третий тип траекторий (угловая дальность более 720°) является более предпочтительным при $T > 5330$ суток.

Последний пример касается оптимизации траектории в гравитационном поле двух небесных тел. В качестве силовой функции используется силовая функция ограниченной круговой задачи трех тел [1, 2, 16]. В начальный момент времени возмущающее тело находится на положительной полуоси x ; плоскость его орбиты совпадает с плоскостью начальной орбиты КА. Предполагается, что возмущающее небесное тело имеет массу в 81.3 большую, чем центральное (что соответствует системе Луна-Земля), и удалено на безразмерное расстояние $\rho=19.22$ (1-й вариант) или $\rho=9.61$ (2-й вариант). На рис.1.2.8 показаны траектории перехода из точки $\mathbf{x}_0=(1,0,0)^T$, $\mathbf{v}_0=(0,1,0)^T$ в точку $\mathbf{x}_k=(2,0,0)^T$, $\mathbf{v}_k=(0,0.7,0)^T$ для этих двух вариантов. С помощью метода продолжения были определены следующие параметры неизвестных параметров краевой задачи: $\mathbf{p}_{v0}=(-0.17884,-0.43997,0)^T$, $d\mathbf{p}_{v0}/dt=(0.38884,0.15231,0)^T$ (1-й вариант) и $\mathbf{p}_{v0}=(-0.24836,-0.33266,0)^T$, $d\mathbf{p}_{v0}/dt=(0.42842,0.13144,0)^T$ (2-й вариант).

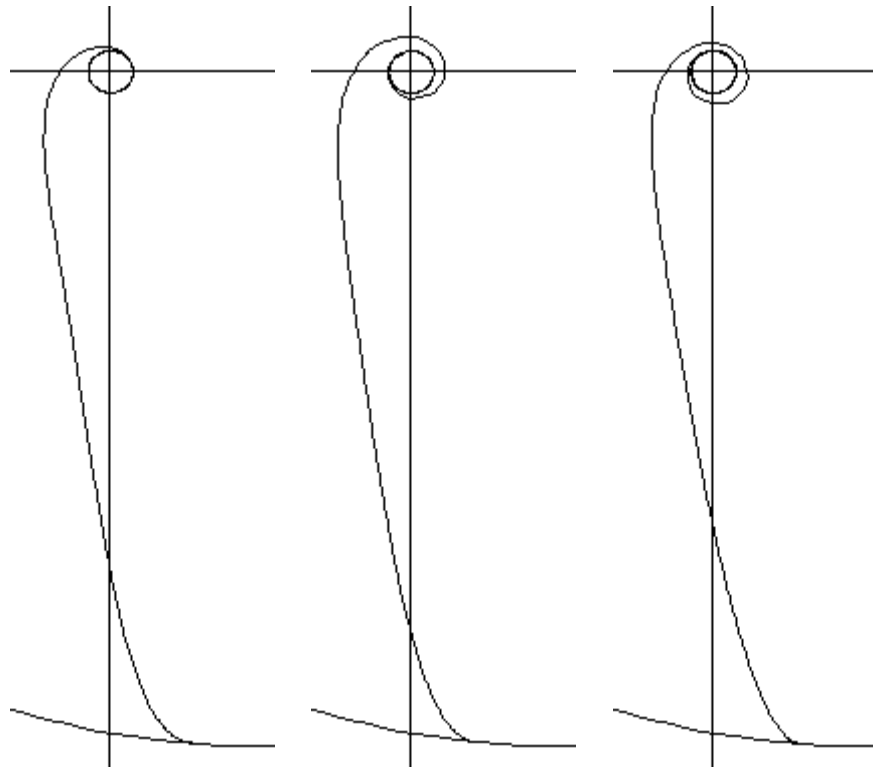


Рис. 1.2.5. Различные типы ИР-оптимальных траекторий сопровождения Плутона.

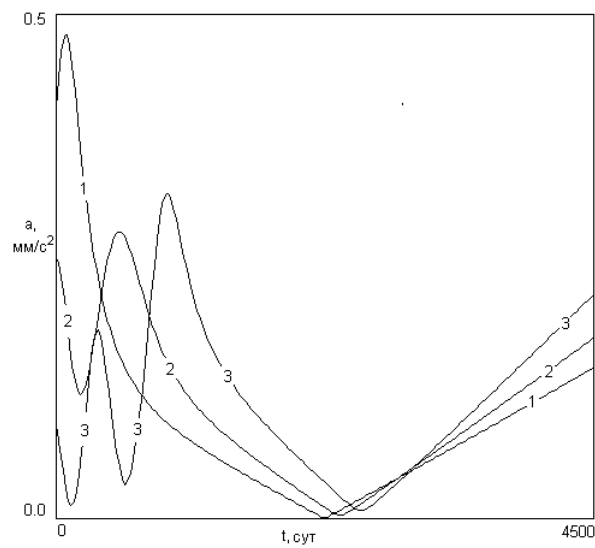


Рис. 1.2.6. Зависимость реактивного ускорения от времени для различных типов ИР-оптимальных траекторий сопровождения Плутона.

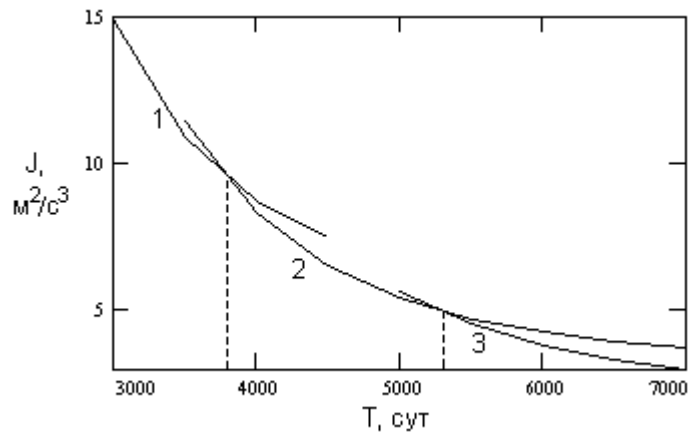


Рис. 1.2.7. Зависимость функционала от продолжительности перелета для трех типов ИР-оптимальных траекторий сопровождения Плутона.

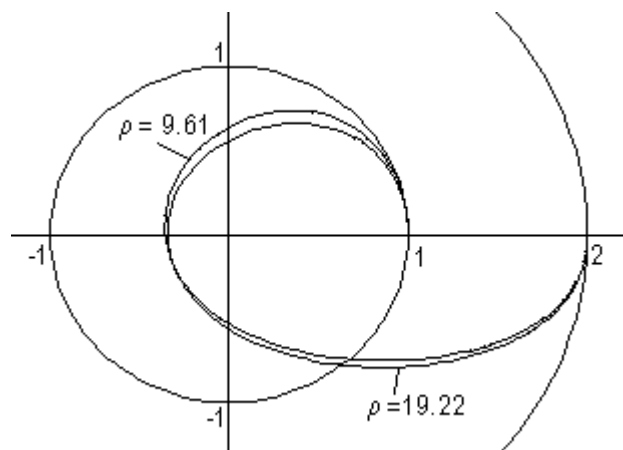


Рис. 1.2.8. Оптимальные траектории в ограниченной круговой задаче трех тел

1.2.2. Сравнение решений для моделей идеально регулируемой двигательной установки и двигательной установки с постоянной скоростью истечения

Часто оказывается, что ИР-оптимальные решения близки к ПСИ-оптимальным. Так как определение ИР-оптимальных траекторий существенно проще определения ПСИ-оптимальных, и, кроме того, на основе единственной ИР-оптимальной траектории можно проводить параметрический (весовой) анализ проекта КА, интересно проанализировать возможность использования ИР-решения для оценки

ПСИ-решений [84]. В этом случае необходимо оценить разницу между значениями основных проектных параметров КА (в первую очередь, разницу в конечной массе КА), получаемую при использовании этих двух моделей. Был проведен анализ ряда межпланетных траекторий, который показал, что во многих случаях эта разница остается в пределах нескольких процентов.

Например, рассмотрим траекторию сопровождения астероида Главного астероидного пояса Фортуна (астероид №19 по каталогу). Предполагается, что КА выводится на геоцентрическую гиперболическую орбиту РН Протон и разгонным блоком Д. Величина начального гиперболического избытка скорости V_{∞} этой орбиты и дата старта оптимизируются. Для оптимизации гелиоцентрического участка траектории используются как ИР-, так и ПСИ-модель. Величина тяги в ПСИ-модели предполагается равной 0.9885 Н, а удельный импульс - 5419 с, что соответствует разрабатываемому в Западной Европе ионному ракетному двигателю ESA-XX [90]. Некоторые результаты представлены в табл. 1.2.2. Последняя колонка табл. 1.2.2 содержит относительную разность между конечными массами КА в ИР- и в ПСИ-моделях. Эта разница остается в пределах нескольких процентов.

Таблица 1.2.2

Оптимальные траектории сопровождения Фортуны

№	t_0	T [сут]	V_{∞} [м/с]	m_0 [кг]	ПСИ- модель		ИР- модель	Δ
					T_b [сут]	$m_k^{\text{ПСИ}}$ [кг]	$m_k^{\text{ИР}}$ [кг]	
1	20.7.2000	900	726	6127	731	4951	5089	2.8 %
2	25.6.2000	1050	466	6160	665	5090	5262	3.4 %
3	20.6.2000	1200	519	6155	645	5117	5373	5.0 %

На рис. 1.2.9 показан гелиоцентрический участок ИР-оптимальной траектории. ПСИ-оптимальная траектория в представленном масштабе не отличается от ИР-оптимальной.

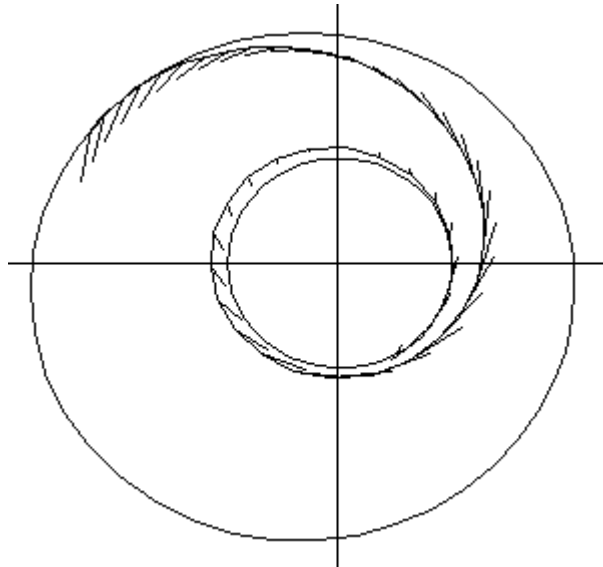


Рис. 1.2.9. ИР-оптимальная траектория сопровождения Фортуны (№1 в табл. 2)

На рис. 1.2.10 представлена зависимость реактивного ускорения от времени для обеих моделей. Из рисунка видно, что активные участки на ПСИ-оптимальной траектории соответствуют локальным максимумам реактивного ускорения на ИР-оптимальной траектории.

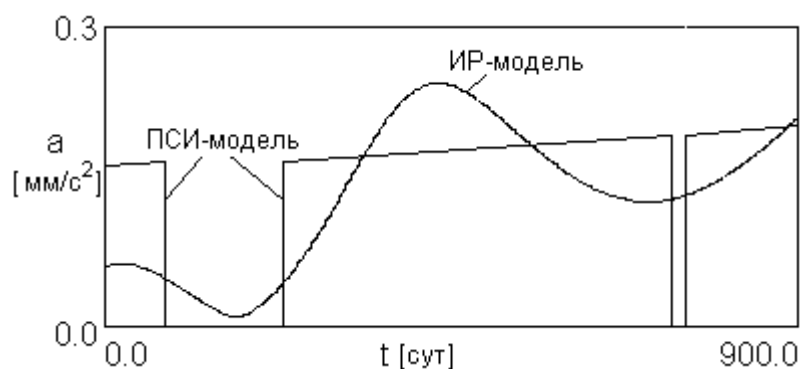


Рис. 1.2.10. Сравнение ПСИ- и ИР-оптимальных законов изменения реактивного ускорения (сопровождение Фортуны, №1 в табл. 1.2.2)

Разумеется, далеко не всегда разница в конечных массах для ИР- и ПСИ-моделей столь мала. Так, в первом численном примере раздела 1.2.7 эта разница составляет 16.7%. В общем случае, чем больший процент начальной массы составляет масса требуемого топлива, тем больших значений может достигать разница в конечных массах. Поэтому возможность использования ИР-решения для оценки ПСИ-решения в каждом конкретном случае требует тщательной проверки.

1.2.3. Оптимизация траекторий в случае постоянной скорости истечения

В этом разделе представлены три численных примера продолжения ИР-оптимального решения в ПСИ-оптимальное: перелет между эллиптическими орбитами, перелет с низкой орбиты ИСЗ на геосинхронную орбиту и изменение фазы орбитального движения КА по круговой орбите на 45° [84]. Исходные данные для этих задач и основные численные результаты представлены в табл. 1.2.3.

Рассмотрим задачу №1 детальнее. Соответствующая ПСИ-оптимальная траектория (рис. 1.2.11) имеет три активных участка. Зависимость реактивного ускорения от времени для случаев ИР- и ПСИ-решения представлена на рис. 1.2.12. Пунктирная линия соответствует параметру нормировки $k=0.5$ в начале процесса продолжения ИР-решения в ПСИ-решение. Такое значение k обеспечивает существование трех активных участков в начале процесса продолжения. На рис. 1.2.13 представлена зависимость угла между вектором тяги и осью x инерциальной системы координат для обоих решений. Этот пример показывает, что ИР-решение является достаточно хорошей аппроксимацией ПСИ-решения.

Таблица 1.2.3

Примеры продолжения ИР-решений в ПСИ-решения

Параметр		Задача 1	Задача 2	Задача 3
Начало	Орбита	$p_o=1, e_o=0.1, \omega_o=\pi$	$p_o=1, e_o=0$	$p_o=1, e_o=0$
	$\mathbf{r}$	(1.1037, -0.1212, 0)	(1,0,0)	(1,0,0)
	$\mathbf{v}$	(0.1092, 0.8940, 0)	(0,1,0)	(0,1,0)
Конец	Орбита	$p_f=1, e_f=0.4, \omega_f=0$	$p_f=6.238, e_f=0$	$p_f=1, e_f=0$
	$\mathbf{r}$	(0.4963, 0.6295, 0)	(-3.4882, -5.1715, 0)	(0.8763, 0.4818, 0)
	$\mathbf{v}$	(-0.7853, 1.0191, 0)	(0.3316, -0.2237, 0)	(-0.4818, 0.8763, 0)
T		7.5	13.7	6.0
ИР-модель				
$\mathbf{p}_{vo}$		(0.003950, 0.054272, 0)	(0.050218, 0.069321, 0)	(-0.021830, -0.056861, 0)
$d\mathbf{p}_{vo}/dt$		(-0.024306, 0.005009, 0)	(-0.048960, 0.042200, 0)	(0.055215, 0.017111, 0)
ПСИ-модель				
a		0.05	0.10	0.05
$\mathbf{p}_{vo}$		(0.093948, 1.820225, 0)	(-2.104856, 9.328105, 0)	(-0.829581, -2.217508, 0)
$d\mathbf{p}_{vo}/dt$		(-0.807759, 0.194261, 0)	(-7.727214, 2.106728, 0)	(2.165689, 0.641663, 0)
Моменты перекл.	1	1.659687	6.085439	1.058080
	2	2.604417	7.646246	4.941918
	3	5.121851	-	-
	4	5.812537	-	-
k		0.5	1.0	0.9

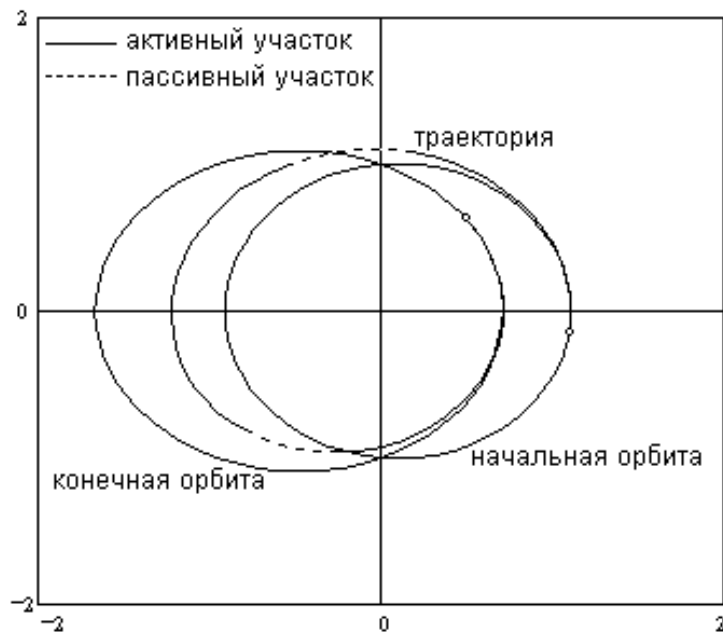


Рис. 1.2.11. ПСИ-оптимальная траектория (задача 1 из табл. 1.2.3)

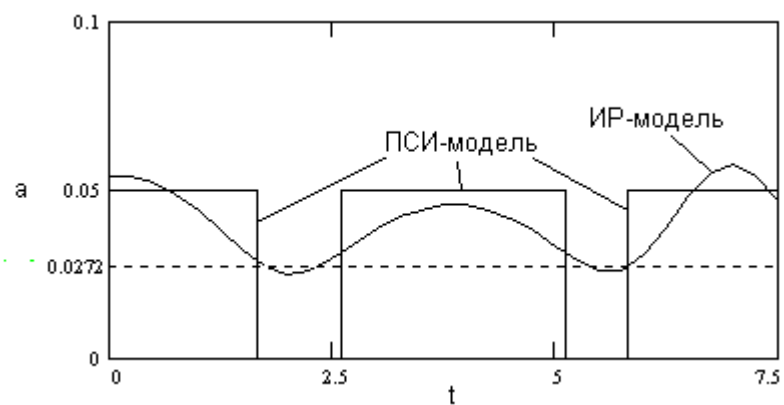


Рис. 1.2.12. Зависимость реактивного ускорения от времени (задача 1 из табл. 1.2.3)

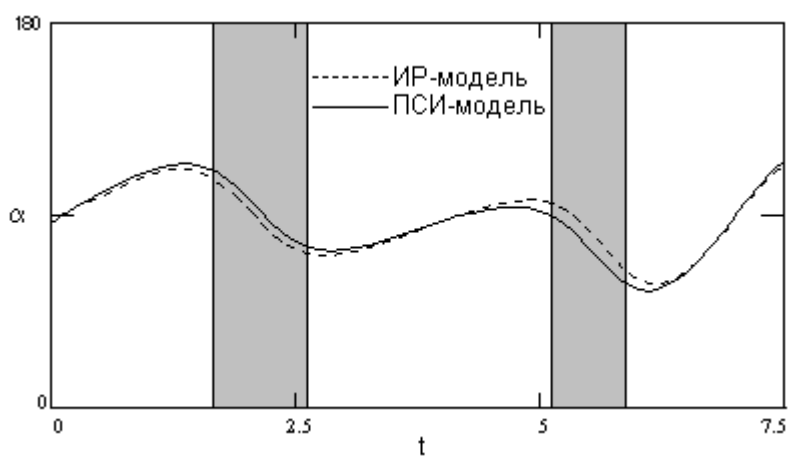


Рис. 1.2.13. Угол между вектором тяги и осью x (задача 1 из табл.1.2.3, затемнены области пассивных участков траектории)

1.3. Задача оптимизации траектории в случае зависимости реактивной мощности идеально регулируемой двигательной установки от фазовых координат и времени

Известно [14], что в случае, когда реактивная мощность N идеально регулируемой двигательной установки не постоянна, функционал, минимум которого соответствует максимуму конечной массы, имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{a^2}{N} dt. \quad (1.3.1)$$

Например, при использовании солнечной электроракетной двигательной установки для гелиоцентрических перелетов, реактивную мощность можно аппроксимировать функцией

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \eta_1(r) \eta_2(t), \quad (1.3.2)$$

где N_0 - реактивная мощность при $t=0$ на гелиоцентрическом удалении r_0 от Солнца, $\eta_1(r)$ - зависимость эффективности солнечной энергоустановки от гелиоцентрического удаления КА, $\eta_2(t)$ - коэффициент, учитывающий деградацию энергодвигательной установки с течением времени. При использовании солнечной электроракетной двигательной установки для геоцентрических перелетов, реактивная мощность может быть аппроксимирована зависимостью

$$N = N_0 \varepsilon_T(\mathbf{x}, t) \eta_2(t), \quad (1.3.3)$$

где $\varepsilon_T(\mathbf{x}, t)$ - функция тени, равная 1 на освещенном участке траектории КА и 0 в тени. Таким образом, в общем случае

$$N = N(\mathbf{x}, t), \quad (1.3.4)$$

и функционал задачи об оптимальном перелете КА с идеально регулируемой двигательной установкой имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T f(\mathbf{x}, t) a^2 dt, \quad (1.3.5)$$

где $f(\mathbf{x}, t) = 1/N(\mathbf{x}, t)$. Соответственно, гамильтониан рассматриваемой задачи принимает вид:

$$H = -fa^2/2 + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a}, \quad (1.3.6)$$

где вектор $\mathbf{a}$ определяется из необходимого условия оптимальности

$$\partial H / \partial \mathbf{a} = -f \mathbf{a} + \mathbf{p}_v = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = (1/f) \mathbf{p}_v = N \mathbf{p}_v. \quad (1.3.7)$$

Оптимальный гамильтониан принимает вид

$$H = N(\mathbf{x}, t) \mathbf{p}_v^T \mathbf{p}_v / 2 + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x, \quad (1.3.8)$$

а дифференциальные уравнения оптимального движения -

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \Omega_x + N \mathbf{p}_v, \\ \ddot{\mathbf{p}}_v &= \Omega_{xx} \mathbf{p}_v + \mathbf{h} \mathbf{p}_v^T \mathbf{p}_v, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.9)$$

где $\mathbf{h} = [\partial N(\mathbf{x}, t) / \partial \mathbf{x}] / 2$. При этом дифференциальные уравнения для элементов матрицы чувствительности примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial e} \right) &= \sum_k \Omega_{x_i x_k} \frac{\partial x_k}{\partial e} + N \frac{\partial p_{vi}}{\partial e} + \left(\sum_k \frac{\partial N}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial e} \right) p_{vi}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial p_{vi}}{\partial e} \right) &= \sum_m \sum_k \Omega_{x_i x_k x_m} p_{vk} \frac{\partial x_m}{\partial e} + \sum_k \Omega_{x_i x_k} \frac{\partial p_{vk}}{\partial e} + 2h_i \sum_k p_{vk} \frac{\partial p_{vk}}{\partial e} + \frac{\partial h_i}{\partial e} p_v^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.10)$$

где i, m, k изменяются от 1 до 3, а переменная e обозначает какой либо элемент вектора неизвестных параметров краевой задачи. Отметим, что в случае (1.3.2), когда реактивная мощность зависит только от радиус-вектора и времени,

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial N}{\partial r} \mathbf{x}, \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial e} &= \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} \right) \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial e} \mathbf{x} + \frac{1}{2r} \frac{\partial N}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial e}. \end{aligned}$$

Например, при $N=1/r^2$,

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{r^4} \mathbf{x}, \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial e} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{4}{r^2} \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial e} \mathbf{x} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial e} \right)$$

Численный пример для этого вида зависимости реактивной мощности от времени приведен на рис.1.3.1 для 1080-суточного перелета от Земли к астероиду Фортуна с начальным гиперболическим избытком скорости 300 м/с. Траектория КА с солнечной энергетической установкой обозначена на рисунке надписью “СЭУ”, а траектория КА с постоянной реактивной мощностью - надписью “ЯЭУ”.

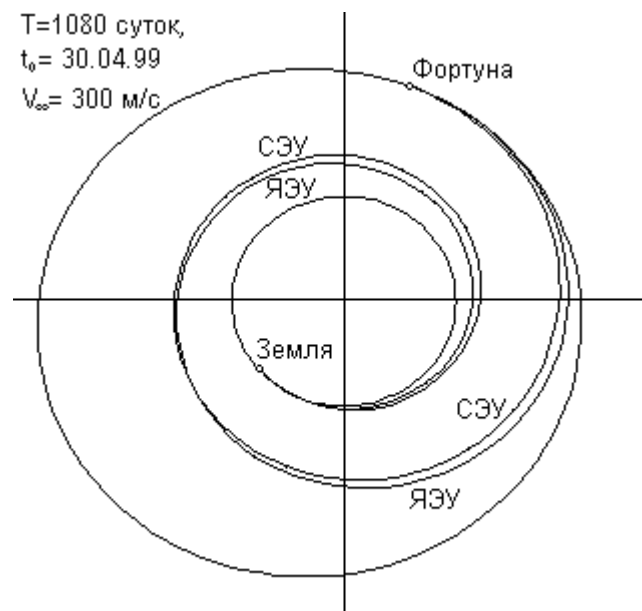


Рис. 1.3.1. Сравнение оптимальных траекторий перелета к Фортуне КА с солнечной и с ядерной энергоустановками.

Из рисунка видно, что в данном случае траектории с постоянной и переменной реактивной мощностью слабо отличаются друг от друга. В общем случае, особенно при многовитковых перелетах, траектории КА с солнечной энергетической установкой имеют тенденцию “прижиматься” к Солнцу.

1.4. Продолжение оптимальных решений по основным баллистическим параметрам

В процессе практического использования описанного выше алгоритма продолжения для решения задач траекторной оптимизации КА с идеально регулируемой двигательной установкой малой тяги, были установлены следующие его особенности:

- Алгоритм практически всегда приводит к решению краевой задачи, если конечная точка траектории в начале процесса продолжения ($\tau=0$) лежит в той же координатной четверти, что и граничный радиус-вектор на правом конце ($\mathbf{x}_k$). В противном случае возможны отказы метода, связанные с плохой обусловленностью матрицы чувствительности при прохождении в процессе продолжения при некотором $\tau \in [0, 1]$ в окрестности точки бифуркации решений.
- Для определения оптимальной траектории с желаемым числом оборотов вокруг притягивающего центра, необходимо решать целую последовательность задач с постепенным изменением времени перелета T . Например, при расчете траектории перелета от Земли к Плутону из физических соображений понятно, что время перелета должно быть не менее 10 лет. Однако, если задать $T=10$ лет при нулевом начальном приближении $\mathbf{z}(0)=0$, то при $\tau=0$ (что соответствует пассивному полету, так как $\mathbf{p}_{v0}=d\mathbf{p}_{v0}/dt=0$) траектория КА состоит из 10 витков вокруг Солнца, совершенных по орбите Земли. С ростом τ число витков не изменяется, так как при каждом числе витков существует своя экстремаль рассматриваемой задачи оптимального управления. В результате, при $\tau=1$, траектория будет иметь те же 10 витков, первые 9 из которых будут проходить в близкой окрестности Солнца, а на последнем КА достигнет Плутона. Поэтому, если надо получить

оптимальную траекторию с угловой дальностью, например, менее 360° , необходимо задать $T=T_0 < 1$ года при $\mathbf{z}(0)=0$, решить эту задачу (то есть определить $\mathbf{z}^0=\mathbf{z}(1)$), затем увеличить T : $T=T_1=T_0+\Delta T$ и решить краевую задачу при $\mathbf{z}(0)=\mathbf{z}^0$. Если величина ΔT не очень большая, процесс решения краевой задачи сходится к решению $\mathbf{z}(1)=\mathbf{z}^1$ и процедура должна быть повторена при $T=T_2=T_1+\Delta T$ и так далее, до достижения требуемого значения T . Способ продолжения решения, аналогичный только что рассмотренному продолжению решения по времени перелета, в [13] назван “дискретным вариантом метода продолжения типа предиктор-корректор”. Фактически, в данном случае на пользователя программного обеспечения возложена роль адаптивного регулятора шага интегрирования по некоторому параметру продолжения - в данном случае по времени перелета T . Необходимость продолжения решения по времени перелета существует, конечно, и при параметрическом анализе характеристик траектории перелета в рамках одного семейства экстремалей. Что касается выбора экстремали с заданным числом витков вокруг притягивающего центра, то эффективная модификация метода продолжения для решения этой задачи будет представлена в следующем разделе.

- Определенные трудности связаны с продолжением решения по времени старта t_0 (по положению КА на начальной орбите), что, в частности, связано с неинвариантностью уравнений оптимального движения, записанных в декартовых координатах, относительно поворота системы координат. Эта проблема снимается полностью для круговых начальных орбит поворотом векторов $\mathbf{p}_{v0}$ и $d\mathbf{p}_{v0}/dt$ на тот же угол, на который поворачивается начальный вектор положения КА $\mathbf{x}_0$. В случае начальных орбит с ненулевым эксцентриситетом, шаг дискретного

продолжения по t_0 может оказаться существенно ограниченным из-за большой чувствительности решения краевой задачи к вариациям вектора $\mathbf{x}_0$ и (особенно!) начального вектора скорости $\mathbf{v}_0$.

- Для обеспечения межпланетных перелетов часто предлагается комбинированная схема выведения КА, когда из сферы действия планеты старта КА выводится импульсом большой тяги. При этом гиперболический избыток скорости КА V_∞ может являться параметром оптимизации, откуда следует необходимость продолжения траекторий по V_∞ . В описанном выше алгоритме, при определении базовой траектории с нулевым начальным приближением для вектора параметров краевой задачи $\mathbf{z}(0)=0$ всегда полагалось $V_\infty=0$, так как при $\mathbf{z}(0)=0$ ($\mathbf{p}_{v0}=0$) вектор ориентации гиперболического избытка скорости ($\mathbf{p}_{v0}/p_{v0}$, см. условия трансверсальности (1.1.6)) неопределен. После определения базовой траектории $\mathbf{p}_{v0} \neq 0$, и можно продолжать решение по величине V_∞ . В большинстве случаев “дискретное продолжение” по V_∞ оказалось достаточно эффективным, но встречались задачи, в которых не удавалось продолжить V_∞ далее некоторого предела, что связано, по-видимому, с ветвлением оптимальных решений.

Из сделанных замечаний ясно, что было бы рационально автоматизировать процесс продолжения решения по основным баллистическим параметрам: V_∞ , t_0 , T . Разумеется, момент старта можно выбрать и из необходимых условий оптимальности (из условий трансверсальности). Однако, как правило требуется оценка оптимальных траекторий для некоторого диапазона времен старта, что приводит к необходимости продолжать решение по t_0 . Дифференциальные уравнения оптимального движения и уравнения для матрицы чувствительности (1.1.16) остаются неизменными, как и форма (1.1.15) дифференциальных

уравнений метода продолжения, но граничные условия (1.1.6), (1.1.7), (1.1.13), (1.1.14), (1.1.20) изменятся. Действительно, продолжение в пространстве параметров (V_∞, t_0, T) можно организовать, например, с использованием следующих их зависимостей от параметра продолжения $0 \leq \tau \leq 1$:

$$\begin{aligned} V_\infty &= V_{\infty 0} + \Delta V_\infty \tau, \\ t_0 &= t_{00} + \Delta t_0 \tau, \\ T &= T_0 + \Delta T \tau, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

где $\Delta V_\infty = V_{\infty k} - V_{\infty 0}$, $\Delta t_0 = t_{0k} - t_{00}$, $\Delta T = T_k - T_0$, индексом “0” обозначены начальные значения параметров, а индексом “k” - конечные.

Начальные условия (1.1.6) примут вид:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0[t_0(\tau)], \quad d\mathbf{x}(0)/dt = \mathbf{v}_0[t_0(\tau)] + V_\infty(\tau) \mathbf{p}_{v0}/p_{v0},$$

а конечные (1.1.7) и (1.1.8) -

$$\mathbf{x}[T(\tau)] = \mathbf{x}_k[t_0(\tau) + T(\tau)], \quad d\mathbf{x}[T(\tau)]/dt = \mathbf{v}_k[t_0(\tau) + T(\tau)]$$

и

$$\mathbf{x}[T(\tau)] = \mathbf{x}_k[t_0(\tau) + T(\tau)], \quad \mathbf{p}_v[T(\tau)] = 0$$

соответственно, где $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$ - векторы положения и скорости планеты старта, а $\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k$ - векторы положения и скорости планеты прибытия, которые зависят от параметров t_0 и T .

Вид функции невязок краевой задачи вместо (1.1.13) и (1.1.14) примет вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}[T(\tau)] - \mathbf{x}_k[t_0(\tau) + T(\tau)] \\ d\mathbf{x}[T(\tau)]/dt - \mathbf{v}_k[t_0(\tau) + T(\tau)] \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}[T(\tau)] - \mathbf{x}_k[t_0(\tau) + T(\tau)] \\ \mathbf{p}_v[T(\tau)] \end{pmatrix}$$

соответственно. В начальных условиях (1.1.20) изменятся выражения для производных по τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} &= \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} \Delta t_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} \right) &= \Omega_x^{(0)} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(0) \\ t=t_0(\tau)}} \Delta t_0 + \frac{\Delta V_\infty}{p_v} \mathbf{p}_v, \end{aligned}$$

где $\Omega_x^{(0)}$ - силовая функция, используемая для расчета движения планеты старта. Изменяются также выражения для $\partial f / \partial \tau$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}(T)}{dt} \Delta T - \mathbf{v}_k[t_0(\tau) + T(\tau)](\Delta t_0 + \Delta T) \\ \left(\Omega_x + \varphi_1(\tau) \mathbf{p}_v + \varphi_2(\tau) \frac{a\varepsilon}{p_v} \mathbf{p}_v \right)_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}(T) \\ t=T(\tau)}} \Delta T - \Omega_x^{(k)} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k[t_0(\tau)+T(\tau)] \\ t=t_0(\tau)+T(\tau)}} (\Delta t_0 + \Delta T) \end{pmatrix}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}(T)}{dt} \Delta T - \mathbf{v}_k[t_0(\tau) + T(\tau)](\Delta t_0 + \Delta T) \\ \frac{d\mathbf{p}_v(T)}{dt} \Delta T \end{pmatrix}$$

где $\Omega_x^{(k)}$ - силовая функция, используемая для расчета движения планеты-цели.

Выбором с помощью формул (1.4.1) направления движения в пространстве (V_∞, t_0, T) предоставляется возможность обхода точек ветвления оптимальных решений, в которых вырожденность матрицы $\mathbf{f}_z$ приводит к неприменимости метода продолжения в рассматриваемой форме.

Следует отметить, что если в начале процесса продолжения по параметрам (V_∞, t_0, T) используется точное решение краевой задачи $\mathbf{z}$ при данных $V_{\infty 0}$,

t_{00} , T_0 (то есть в (1.1.15) $\mathbf{b}=0$), то при любом τ $\mathbf{z}(\tau)$, полученная в результате интегрирования дифференциальных уравнений (1.1.15), является решением краевой задачи при $V_\infty(\tau)$, $t_0(\tau)$, $T(\tau)$.

1.5. Априорный выбор экстремали для определения базовой оптимальной траектории космического аппарата с идеально регулируемой двигательной установкой

Как отмечалось выше, ИР-задача является многоэкстремальной, что в ряде случаев приводит к затруднениям в решении краевой задачи, так как матрица чувствительности становится плохо обусловленной при прохождении вблизи точки ветвления решений в процессе продолжения. В большинстве практически встречающихся случаев, различия между экстремальными траекториями заключается в разном числе целых оборотов КА вокруг центрального тела. Кроме того, в предыдущем параграфе отмечались трудности, связанные с определением оптимальных траекторий перелета между планетами с существенно различающимися периодами обращения (например, между Землей и Плутоном или Землей и Меркурием). Поэтому целесообразной является постановка задачи об определении ИР-оптимальной траектории КА с заданным числом целых оборотов вокруг притягивающего центра. Для межпланетных перелетов с фиксированными датой старта и временем перелета это, фактически, задача об оптимизации перелета с заданной угловой дальностью.

Рассмотрим оптимизацию базовой траектории межпланетного перелета, то есть задачу сопровождения при нулевом начальном гиперболическом избытке скорости и с нулевым приближением для вектора параметров краевой задачи ($\mathbf{z}=0$). Предположим, что дата старта t_0 и время перелета T заданы. Тогда начальный радиус-вектор $\mathbf{x}_0$ КА определяется положением планеты старта в момент времени t_0 : $\mathbf{x}^0(0)$, а конечный - положением планеты прибытия в момент $t_0 + T$: $\mathbf{x}_k$ (рис.1.5.1).

При $z=0$ реактивное ускорение равно 0 на всей траектории перелета и в момент его окончания КА окажется в той же точке, что и планета старта, с радиус-вектором $\mathbf{x}_0(T)$. Изменяя значение гравитационного параметра центрального тела, можно добиться, чтобы КА, двигаясь по начальной орбите, в момент времени $t_0 + T$ оказался в точке пересечения этой орбиты с проекцией на ее плоскость заданного конечного радиус-вектора $\mathbf{x}_k$ (точка К на рис.1.5.1). Определить такое начальное значение гравитационного параметра μ_0 можно следующим образом.

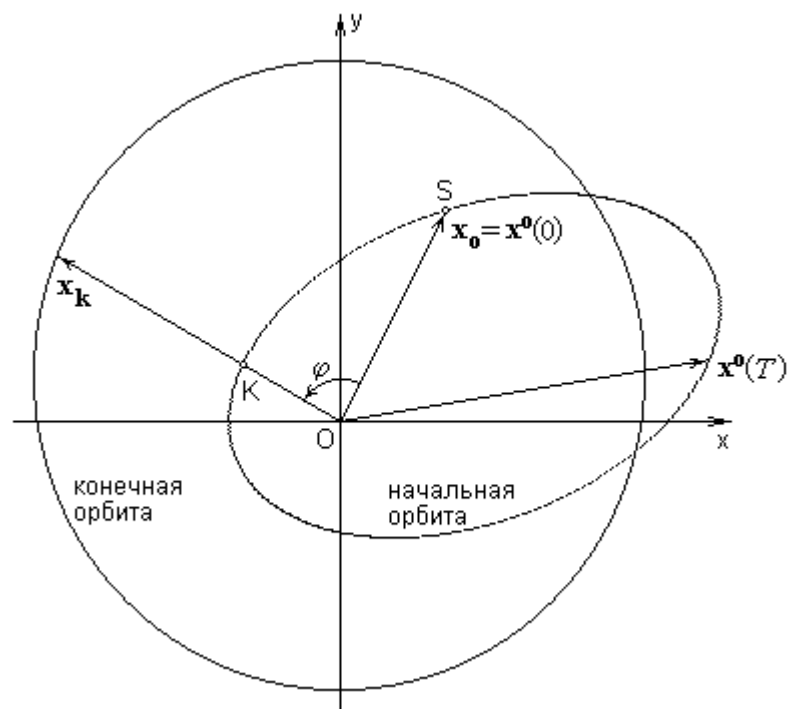


Рис. 1.5.1. Геометрическая интерпретация определения начального значения гравитационного параметра

Пусть истинная аномалия на начальной орбите в точке S равна v_0 , а в точке К - $v_k = v_0 + \varphi$, где φ - угол между вектором $\mathbf{x}_0$ и проекцией вектора $\mathbf{x}_k$ на плоскость начальной орбиты. При известном эксцентриситете e начальной орбиты, по известным значениям истинной аномалии v_0 и v_k можно определить соответствующие значения средней аномалии M_0 и M_k ($M = E - e \sin E$, где $E = 2 \arctg \{ [(1-e)/(1+e)]^{0.5} \tan(v/2) \}$ – эксцентрическая

аномалия). Но на кеплеровской орбите средняя аномалия изменяется линейно по времени: $M=M_0+n(t-t_0)$, где $n=(\mu_0/a^3)^{0.5}$ - среднее движение КА на начальной орбите. Следовательно для того, чтобы в конечный момент времени t_0+T КА оказался в точке К, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$M_k+2\pi N_{\text{rev}}=nT+M_0,$$

где N_{rev} - число целых витков вокруг центрального тела, которое должен сделать КА за время T , прежде чем попасть в точку К в момент времени t_0+T . Из этой формулы, с учетом приведенного выше выражения для среднего движения n , получим

$$\mu_0=[(M_k+2\pi N_{\text{rev}}-M_0)/T]^2 a^3.$$

Для реализации гладкого подолжения по гравитационному параметру центрального тела μ , допустим, что он является линейной функцией параметра продолжения τ :

$$\mu(\tau)=\mu_0+(1-\mu_0)\tau$$

(так как используется безразмерная форма записи уравнений движения КА, конечное значение гравитационного параметра, соответствующее физической постановке задачи, равно 1). Для того, чтобы начальная и конечная орбиты были инвариантны относительно преобразования $\mu(\tau)$, достаточно положить, что скорость $\mathbf{v}(t, \tau)$ точки, движущейся по какой-либо из этих орбит, равна

$$\mathbf{v}(t, \tau)=\mu(\tau)^{0.5} \mathbf{v}(t, 1),$$

где $\mathbf{v}(t, 1)$ - скорость соответствующей точки при $\tau=1$ ($\mu=1$). Для центрального ньютоновского гравитационного поля Ω приведенные выше соотношения выполняются точно, для других полей, мало отличающихся

от центрального - приближенно. Представляемый вариант метода продолжения по гравитационному параметру работает и в последнем случае, если основной член разложения силовой функции Ω (то есть μ/r) оказывает преобладающее влияние на движение КА.

Уравнения оптимального движения КА в рассматриваемом случае примут вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \quad \ddot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}} = \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}}\mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \quad (1.5.1)$$

причем $\mu(\tau)$ является функцией продолжения. Граничные условия, с учетом сделанных замечаний, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_0, \\ \mathbf{x}(T) &= \mathbf{x}_k, \quad \dot{\mathbf{x}}(T) = \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

Вектор невязок краевой задачи можно записать в виде

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}(T) - \mu^{1/2}(\tau)\mathbf{v}_k \end{pmatrix}.$$

В дифференциальном уравнении метода продолжения (1.1.15) частная производная от функции невязок по параметру продолжения будет равна

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \tau} - \frac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \mathbf{v}_k \end{pmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения (1.5.1) необходимо дополнить уравнениями для элементов матрицы чувствительности и вектора частных производных $\mathbf{f}$ по τ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} \right) &= \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}} \right) &= \mu(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{z}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}\right) &= \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \Omega_{\mathbf{x}} + \mu(\tau) \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}}, \\ \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \tau}\right) &= \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v + \mu(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} + \Omega_{\mathbf{xx}} \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} \right],\end{aligned}$$

где $\mathbf{z}=(\mathbf{p}_{v0}^T, d\mathbf{p}_{v0}^T/dt)^T$, как и прежде. Замыкают систему дополнительные начальные условия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{x}(0)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(0)}{\partial \tau} &= \frac{1}{2\mu^{1/2}(\tau)} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \mathbf{v}_0, \\ \frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_v(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} &= \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \dot{\mathbf{p}}_{v0}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_v(0)}{\partial \mathbf{p}_{v0}} = \frac{\partial \mathbf{p}_v(0)}{\partial \tau} = \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_v(0)}{\partial \tau} = 0.\end{aligned}$$

Численная реализация описанной схемы продолжения по гравитационному параметру центрального тела показала ее высокую эффективность. Так как в силу дифференциальных уравнений метода продолжения при фиксированных дате старта и времени перелета угловая дальность перелета КА в процессе продолжения не изменяется, при использовании данной схемы не возникает проблемы прохождения вблизи точек ветвления решения и связанных с этим отказов метода, вызванных плохой обусловленностью матрицы чувствительности. Это позволяет говорить о практической регулярности метода оптимизации ИР-траекторий. В самом деле, в процессе эксплуатации алгоритма для задач межпланетных перелетов не было зафиксировано случаев его отказа, за исключением случая перелетов с очень большой угловой дальностью - речь идет о нескольких десятках витков вокруг центрального тела, и случаев, когда оптимальная траектория проходит в близкой окрестности от притягивающего тела. В этих вариантах возможно возникновение трудностей, связанных с высокой чувствительностью конечного фазового вектора КА к вариациям значений параметров краевой задачи, то есть

просто может не хватать числа значащих цифр в машинном представлении значений параметров краевой задачи для обеспечения сходимости.

При использовании представленного в это разделе алгоритма, для определения оптимальной экстремали с заданном числом целых витков вокруг центрального тела N_{rev} , необходимо задать только граничные условия для фазового вектора КА, время перелета и N_{rev} , и эти данные оказываются достаточными для регулярного определения оптимального решения. Практические возможности метода продемонстрированы в следующем численном примере. Рассматривается перелет от Земли к Меркурию. Фазовые координаты планет вычисляются с помощью разложений Ньюкома, отнесенных к эклиптике и экватору эпохи 1950.0 [16]. Дата старта - 1.0 февраля 2001 г. по гринвичскому времени, время перелета 1400 суток. Если эти исходные данные при $\mathbf{z}_0=0$ попытаться использовать для определения ИР-экстремали базовым вариантом метода продолжения, описанном в предыдущих разделах (при $\mu=1=\text{const}$), то итоговая экстремальная траектория, включающая три целых витка вокруг Солнца, будет иметь представленный на рис.1.5.2 вид. Такой результат объясняется тем, что траектория КА в начале продолжения (на траектории пассивного движения) включала те же три целых витка вокруг Солнца. Полученная экстремаль явна неприемлива с практической точки зрения. Для того чтобы получить более рациональное решение с помощью ранее описанного базового варианта метода продолжения, необходимо сначала задать некоторое, не очень большое, T (скажем, 1 год) для получения базовой оптимальной траектории перелета к Меркурию. Затем необходимо постепенно наращивать время перелета, при этом угловая дальность перелета будет увеличиваться на 360° при приращении T на один период обращения Меркурия вокруг Солнца T_M (причем, при использовании дискретного продолжения по T шаг продолжения должен быть не более

половины T_M , иначе возможен переход на другую экстремаль), и так до достижения необходимого значения T . Для того, чтобы получить экстремаль с другим числом витков, необходимо либо получить новую базовую траекторию с другим временем перелета и количеством целых витков вокруг Солнца и повторить продолжение по T , либо продолжать траекторию с одновременным согласованным изменением даты старта и времени перелета, в результате чего траектория будет “закручиваться” или “раскручиваться” вокруг Солнца. Как видно, алгоритм решения рассматриваемой задачи при использовании базового варианта метода продолжения получается довольно трудоемким.

Использование представленной в этом разделе модификации метода продолжения - метода продолжения по гравитационному параметру центрального притягивающего тела - позволяет решить рассматриваемую задачу за один “шаг”, то есть при однократном использовании метода для определения каждой конкретной экстремали с заданным числом целых витков N_{rev} . В качестве примера, на рис.1.5.3 представлена оптимальная траектория с $N_{rev}=12$, полученная при использовании данного метода при $\mathbf{z}_0=0$.

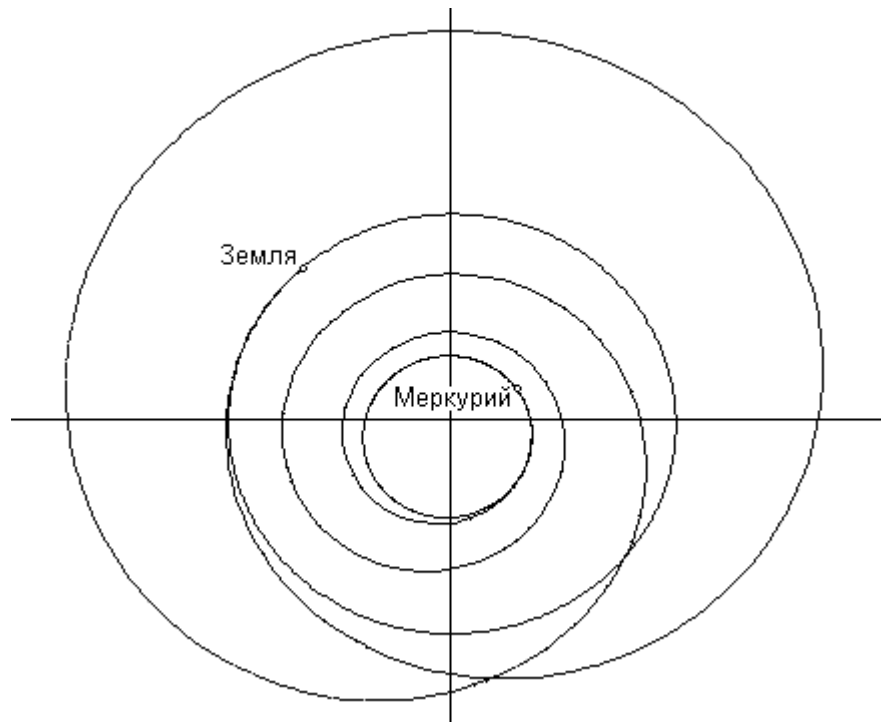


Рис. 1.5.2. Определение ИР-экстремальной траектории при использовании базового варианта метода продолжения

Следует отметить, что ситуация, аналогичная рассмотренной, возникает во всех случаях когда возможны варианты перелетов с разным числом витков. Даже когда анализ траекторий с разным числом витков не представляет интереса, для определения базовой оптимальной траектории предпочтительнее использование метода продолжения по гравитационному параметру, так как он, в отличие от базового метода продолжения, является практически регулярным.

Разумеется, возможно существование точек ветвления ИР-экстремальных траекторий, не связанных с изменением числа витков, и вопрос об отказах метода продолжения, связанных с такими бифуркациями, остается открытым. Однако, в процессе интенсивного двухлетнего практического использования представленных методов для задач оптимизации межпланетных перелетов, подобные явления не были зафиксированы, что

говорит, по крайней мере, об их нетипичности для регулярных траекторий (т.е. для траекторий без тесного сближения с притягивающими центрами).

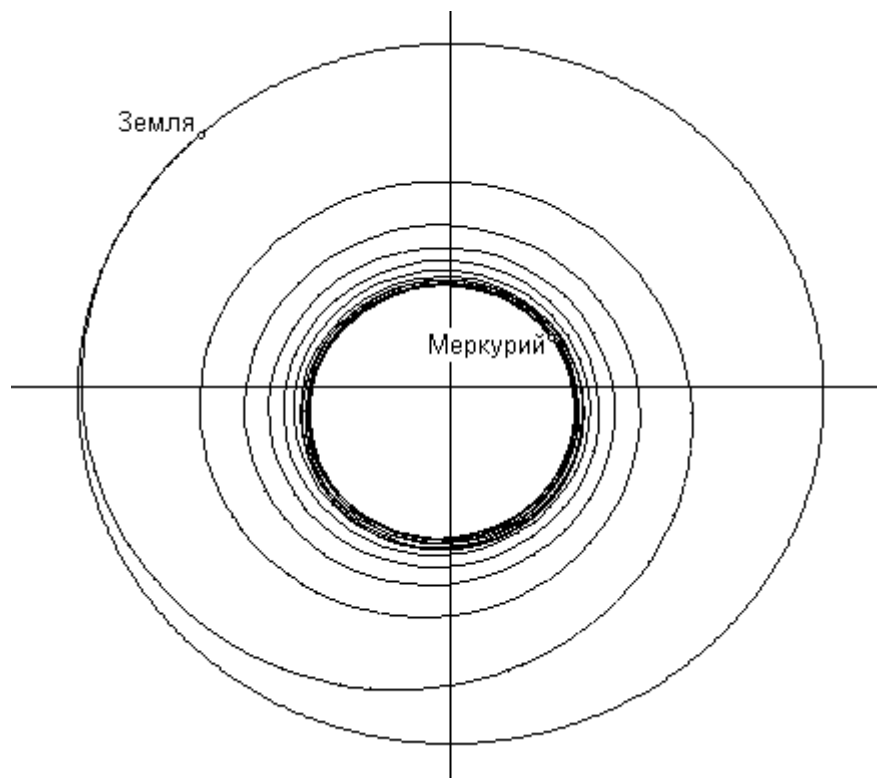


Рис. 1.5.3. Определение ИР-экстремальной траектории при использовании метода продолжения по гравитационному параметру

1.6. Переопределение функции порогового значения в процессе продолжения.

Процесс продолжения ИР-решения в ПСИ-оптимальное решение в задаче с фиксированным временем имеет одну неприятную особенность, связанную с разрывностью правых частей дифференциальных уравнений (1.1.15) при изменении в процессе продолжения количества активных и пассивных участков траектории.

В самом деле, при появлении (исчезновении) нового участка траектории, в зависимостях элементов матрицы $\mathbf{f}_z$ и вектора $\mathbf{f}_t$ от времени появляются разрывы. Это не осложняет существенно интегрирование системы дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных и

элементов $\mathbf{f}_z$ и $\mathbf{f}_\tau$ при фиксированном значении τ , но приводит к разрывности $\mathbf{f}_z(T, \tau)$ и $\mathbf{f}_\tau(T, \tau)$, рассматриваемых в качестве функций параметра продолжения τ . Следствием этого является появление разрывов в правых частях (1.1.15), что приводит к необходимости уменьшения шага интегрирования по τ уравнений (1.1.15) и к проблемам, связанным с обеспечением точности численного интегрирования этих уравнений. Значение этого факта усиливается трудоемкостью вычисления правых частей системы (1.1.15): для их определения требуется решить задачу Коши для системы 48 дифференциальных уравнений 2-го порядка (1.1.16).

Почему проблема разрывности правых частей не приводит к принципиальным затруднениям при интегрировании системы (1.1.16)? Ответ заключается в следующем: разрывы правых частей системы (1.1.16) имеют место при смене знака известных непрерывных функций фазовых координат (и, в общем случае, времени), причем сами правые части как до момента переключения, так и после него являются известными функциями зависимых переменных системы (1.1.16), времени и постоянных параметров. Момент переключения управления, - а следовательно и разрыв 1-го рода в правых частях уравнений для фазовых координат - определяет функция переключения ψ : $\varepsilon = \varepsilon(\psi)$. Не представляет труда определить момент разрыва правых частей, интегрируя непрерывный аналог системы (1.1.16), отличающийся тем, что в точке смены знака функции переключения, вид правых частей не изменяется. После того, как на каком-то шаге численного интегрирования обнаружена смена знака функции переключения, точка переключения t_s (точка разрыва правых частей) может быть определена с помощью локализации корня с использованием уже определенного в методе численного интегрирования разложения для зависимых переменных на длине текущего шага. После

определения t_s осуществляется выход из процедуры численного интегрирования, коррекция (при необходимости) значений зависимых переменных, и, начиная с t_s , интегрирование продолжается с новым видом непрерывных правых частей, соответствующим новому знаку ψ . Такой алгоритм позволяет избежать дробления шага интегрирования в окрестности скачка и сопутствующих этому дроблению шага проблем, связанных с расходимостью и неустойчивостью численного интегрирования.

Применение подобного алгоритма к численному интегрированию уравнений метода продолжения (1.1.15) затруднено следующим обстоятельством: несмотря на то, что возможно определение непрерывной функции переключения, зависящей от $\mathbf{z}$ и τ и меняющей свой знак при изменении числа пассивных и активных участков, отсутствует простая возможность обеспечения непрерывности правых частей (1.1.15) при определении корня этой функции в процессе интегрирования уравнений (1.1.15). При интегрировании (1.1.16) непрерывность правых частей обеспечивалась неизменностью функции $\varepsilon(\psi)$ на шаге интегрирования, несмотря на то, что функция переключения $\psi = p_v - 1$ меняла свой знак внутри этого шага. Для обеспечения непрерывности правых частей уравнений (1.1.15) необходимо “заморозить” на шаге интегрирования структуру траектории, то есть порядок чередования и количество активных и пассивных участков. Практическое осуществление этого требования представляется труднореализуемым.

В качестве функции переключения при интегрировании уравнений (1.1.15) можно использовать, например, произведение вида $\prod_s \left. \frac{dp_v}{dt} \right|_{t=t_s}$ по всем точкам переключения s для текущих значений $\mathbf{z}$ и τ . Для обеспечения

неизменности структуры траектории на шаге продолжения необходимо каким-либо образом отличать ранее существовавшие участки траектории от новых, которые появились в пределах текущего шага интегрирования по τ . При вычислении правых частей (1.1.15), во время интегрирования системы (1.1.16), необходимо принудительно устанавливать $\varepsilon=0$ на вновь появившихся активных участках и $\varepsilon=1$ на вновь появившихся пассивных участках для определения значения τ_s , при котором траектория меняет свою структуру и правые части (1.1.15) претерпевают разрыв. После определения τ_s необходимо выйти из процедуры численного интегрирования (1.1.15), отметить вновь появившийся участок траектории как “старый” и возобновить интегрирование.

Различать “старые” и “новые” участки траектории можно, например, вычисляя моменты переключения t_s как функции от параметра продолжения τ . Это приводит к увеличению размерности системы (1.1.15) на единицу для каждого учитываемого участка траектории. В самом деле, пусть при некоторых τ_0 и $\mathbf{z}_0$ в момент t_{s0} выполняется условие переключения для (1.1.16), то есть

$$p_v(t_{s0}; \tau_0, \mathbf{z}_0)=1. \quad (1.6.1)$$

Тогда можно записать дифференциальное уравнение, определяющее вместе с начальными условиями $t_s(\tau_0)=t_{s0}$ функцию $t_s(\tau)$:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}_v^T}{\partial t} \mathbf{p}_v \right)_{t=t_s} \frac{dt_s}{d\tau} + \left(\mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial \mathbf{z}} \right)_{t=t_s} \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = 0, \quad t_s(\tau_0) = t_{s0},$$

или

$$\frac{dt_s}{d\tau} = - \frac{1}{\mathbf{p}_v^T(t_s; \tau, \mathbf{z}) \mathbf{p}_v(t_s; \tau, \mathbf{z})} \mathbf{p}_v^T(t_s; \tau, \mathbf{z}) \frac{\partial \mathbf{p}_v(t_s; \tau, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{d\tau}, \quad t_s(\tau_0) = t_{s0}. \quad (1.6.2)$$

Отметим нерегулярность дифференциальных уравнений (1.6.2) в критических точках, где p_v касается своего порогового значения, то есть как раз при смене структуры траектории. Для практического использования уравнений (1.6.2) необходима их регуляризация. Дополнительным неудобством может оказаться динамическое изменение размерности системы (1.1.15), (1.6.2) при изменении числа участков траектории в процессе продолжения.

В любом случае, подобный алгоритм, с отметкой точек переключения тяги, вряд ли применим для траекторий с большим количеством активных участков. Поэтому предлагается менее строгий способ решения проблемы изменения структуры траектории КА в процессе ее продолжения путем переопределения функции порогового значения для системы (1.1.16).

Допустим зависимость функции переключения ψ : $\varepsilon = \varepsilon(\psi)$ от параметра продолжения τ и времени, такую что $\psi(\tau; p_v, t) = p_v - \sigma(\tau; t)$, причем $\sigma(0; t) = \pi(t)$ и $\sigma(1; t) = 1$. При выполнении этих условий функция переключения в начале процесса продолжения равна некоторой заданной функции $\pi(t)$, а при $\tau = 1$ $\psi(\tau; p_v, t) = p_v - 1$, как и следует из условий оптимальности ПСИ-траекторий с фиксированным временем. Функцию $\sigma(\tau; t)$ назовем функцией порогового значения. Она может быть представлена, например, в виде:

$$\sigma(\tau; t) = (1 - \tau) \pi(t) - \tau. \quad (1.6.3)$$

При использовании функции порогового значения вида (1.6.3) переключение управления происходит не при $p_v = 1$, а в точках, где $p_v = (1 - \tau) \pi(t) - \tau$.

Функция переключения ψ теперь явно зависит от параметра продолжения, поэтому

$$\partial \varepsilon / \partial \tau = \delta [p_v - (1 - \tau) \pi(t) - \tau] [\partial p_v / \partial \tau + \pi(t) - 1],$$

так что в выражениях (1.1.17)-(1.1.19) при $e=\tau$ значение s изменится на

$$s = \text{sgn}(\dot{p}_v) \mathbf{p}_v^T \frac{d\mathbf{p}_v}{de} + \pi(t) - 1 \quad (1.6.4)$$

и для всех e значение p_v в точке переключения равно не 1, а

$$p_v = \sigma(\tau; t). \quad (1.6.5)$$

За исключением указанных модификаций (1.6.3)-(1.6.5), метод решения задачи аналогичен описанному выше методу с постоянной функцией порогового значения $\sigma(\tau; t)=1$. Выбор скалярной функции $\pi(t)$ определяет количество и расположение активных и пассивных участков траектории при $\tau=0$. Эта функция может быть разрывной. При удачном выборе $\pi(t)$ структура траектории не изменится в процессе продолжения, и проблемы, связанные с вычислительной неустойчивостью, будут преодолены. Наиболее простой и рациональной формой функции $\pi(t)$ представляется кусочно постоянная функция.

1.7. Оптимизация перелетов с постоянной тягой за фиксированное время

До этого раздела при рассмотрении задачи оптимизации перелета КА с фиксированным временем в рамках ПСИ-модели предполагалось, что величина реактивного ускорения постоянна. Более близок к реальности, однако, случай постоянства реактивной тяги. При этом уравнения движения КА имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = \Omega_x + \varepsilon \frac{P}{m} \mathbf{e}, \quad \dot{m} = -\varepsilon \frac{P}{w}, \quad (1.7.1)$$

где m - текущая масса КА, P - реактивная тяга, $\mathbf{e}$ - единичный вектор ее ориентации, w - скорость истечения.

При фиксированном времени перелета T наиболее часто используются следующие постановки задачи оптимизации ([3-6, 9, 13, 14, 16, 21-24, 27-29] и др.):

1. Задача о максимуме массы в конечной точке:

$$J=m(T). \quad (1.7.2 \text{ а})$$

2. Задача о минимальных затратах топлива:

$$J = \int_0^T \varepsilon \frac{P}{w} dt. \quad (1.7.2 \text{ б})$$

3. Задача о минимальном моторном времени:

$$J = \int_0^T \varepsilon dt. \quad (1.7.2 \text{ в})$$

4. Задача о минимальном приращении характеристической скорости:

$$J = \int_0^T \varepsilon \frac{P}{m} dt. \quad (1.7.2 \text{ г})$$

Следует отметить, что задачи (1.7.2 а)-(1.7.2 г) эквивалентны, если задана начальная масса КА $m(0)=m_0$, величины тяги и скорости истечения постоянны на всех активных участках траектории и в процессе полета не происходит сброса элементов КА, то есть если рассматривается движение одноступенчатого КА с энергоустановкой постоянной мощности и с неизменными в процессе перелета характеристиками двигательной установки. В случае, если мощность бортовой энергоустановки (а, следовательно, и тяга) зависит от фазовых координат КА, задача (1.7.2 в) имеет сомнительный физический смысл, так же, как и задача (1.7.2 г) при сбросе элементов КА (отработавшие ступени, подвесные топливные баки, переходники, элементы энергоустановки, части полезной нагрузки и т.д.) в процессе перелета. Таким образом, функционалы (1.7.2 а) и (1.7.2 б) охватывают наиболее общий случай. При использовании функционала

(1.7.2 а) предполагается, что начальная масса КА m_0 задана. Однако, часто встречаются ситуации, когда необходимо определить требуемый запас топлива (заправку) КА с известной конечной массой. В этом случае задана конечная масса КА $m(T)=m_k$ и требуется минимизировать m_0 . Для решения этой задачи функционал (1.7.2 а) неприменим, поэтому наиболее универсальной является постановка задачи, использующая функционал (1.7.2 б), так как при ее использовании возможны варианты с заданием массы КА на любом конце траектории.

Итак, рассматривается задача о минимальных затратах топлива

$$J = \int_0^T \varepsilon \frac{P}{w} dt \quad (1.7.3)$$

при фиксированном времени T для динамической системы (1.7.1). Гамильтониан задачи (1.7.1), (1.7.3) имеет вид

$$H = -\varepsilon \frac{P}{w} + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \varepsilon \frac{P}{m} \mathbf{p}_v^T \mathbf{e} - \varepsilon \frac{P}{w} p_m,$$

где p_m - сопряженная массе КА m переменная. Из условия максимума гамильтониана по функциям управления $\mathbf{e}$, ε , определяем оптимальную ориентацию вектора тяги и функцию переключения:

$$\mathbf{e} = \mathbf{p}_v / p_v, \quad \varepsilon = \varepsilon \left[p_v - \frac{m}{w} (1 + p_m) \right] = \begin{cases} 1, & p_v > \frac{m}{w} (1 + p_m), \\ 0, & p_v \leq \frac{m}{w} (1 + p_m). \end{cases} \quad (1.7.4)$$

Уравнения для сопряженных переменных имеют вид:

$$\ddot{\mathbf{p}}_v = \Omega_{xx} \mathbf{p}_v, \quad \dot{p}_m = \varepsilon \frac{P}{m^2} p_v. \quad (1.7.5)$$

Система (1.7.1), (1.7.4), (1.7.5) должна быть дополнена краевыми условиями, включая условия трансверсальности. Для фазовых координат $\mathbf{x}$, $d\mathbf{x}/dt$ и соответствующих им сопряженных переменных $-d\mathbf{p}_v/dt$, $\mathbf{p}_v$

граничные условия остаются прежними (например, (1.1.6), (1.1.7) или (1.1.8)). В случае, если задана начальная масса, к граничным условиям добавятся соотношения

$$m(0)=m_0, p_m(T)=0, \quad (1.7.6)$$

а в случае фиксированной конечной массы - соотношения

$$m(T)=m_k, p_m(0)=0. \quad (1.7.7)$$

Вектор невязок краевой задачи имеет вид

$$\mathbf{f}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ p_m(T) \end{pmatrix} \quad (1.7.8)$$

при заданной начальной массе и

$$\mathbf{f}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ m(T) - m_k \end{pmatrix} \quad (1.7.9)$$

при заданной конечной массе, где $\mathbf{f}$ - ранее рассматриваемый вектор невязок (для задачи с постоянной величиной ускорения), например (1.1.13) или (1.1.14). Вектор неизвестных параметров краевой задачи имеет вид

$$\mathbf{z}_p = (\mathbf{p}_{v0}, d\mathbf{p}_{v0}/dt, p_{m0})$$

в случае, если задана начальная масса и

$$\mathbf{z}_p = (\mathbf{p}_{v0}, d\mathbf{p}_{v0}/dt, m_0)$$

в случае, если задана конечная масса.

Следовательно, система дифференциальных уравнений метода продолжения (1.1.15) преобразуется к виду

$$\frac{d\mathbf{z}_p}{d\tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \mathbf{z}_p} \right) \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \tau} \right), \quad \mathbf{z}_p(0) = \mathbf{z}_{p0}, \quad (1.7.10)$$

где $\mathbf{b}$ - значения вектора невязок $\mathbf{f}_p$ при $\mathbf{z}_p = \mathbf{z}_{p0}$. Из последней формулы видно, что для реализации метода продолжения в рассматриваемой случае

необходимо вычисление производных $\partial m/\partial \mathbf{z}_p$, $\partial p_m/\partial \mathbf{z}_p$. На участках постоянной реактивной тяги соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial m}{\partial e} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p_m}{\partial e} \right) &= \frac{\varepsilon P}{m^2} \left(\frac{1}{p_v} \mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial e} - \frac{2 p_v}{m} \frac{\partial m}{\partial e} \right), \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

где e - элемент вектора $\mathbf{z}_p$. В точках включения и отключения тяги t_s эти частные производные претерпевают разрыв:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial m}{\partial e} \right|_{t=t_s^+} &= \left. \frac{\partial m}{\partial e} \right|_{t=t_s^-} \mp \frac{\psi_e}{d\psi/dt} \frac{P}{w}, \\ \left. \frac{\partial p_m}{\partial e} \right|_{t=t_s^+} &= \left. \frac{\partial p_m}{\partial e} \right|_{t=t_s^-} \pm \frac{\psi_e}{d\psi/dt} \frac{P}{m^2} p_v, \end{aligned}$$

где $d\psi/dt=s_t$ в точках переключения, s_t - то же, что и выражении (1.1.19), а ψ_e - это частная производная от функции переключения $\psi=p_v-(m/w)(1+p_m)$ по e :

$$\psi_e = \frac{1}{p_v} \mathbf{p}_v^T \frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial e} - \frac{1+p_m}{w} \frac{\partial m}{\partial e} - \frac{m}{w} \frac{\partial p_m}{\partial e}.$$

Начальные значения этих элементов матрицы чувствительности при $t=0$ равны 0 для всех e , кроме m_0 для $\partial m/\partial e$ и p_{m0} для $\partial p_m/\partial e$: $\partial m(0)/\partial m_0 = \partial p_m(0)/\partial p_{m0} = 1$.

Что касается дифференциальных уравнений для остальных элементов матрицы чувствительности, то они остаются идентичными соответствующим уравнениям из (1.1.16), но в правых частях дифференциальных уравнений для элементов матрицы чувствительности

$\partial \mathbf{x}/\partial e$ появляется дополнительное слагаемое $-\frac{P}{m^2} \frac{\varepsilon}{p_v} \varphi_2(\tau) \frac{\partial m}{\partial e} \mathbf{p}_v$. В

уравнении (1.1.19), при расчете скачка частных производных вида $\partial \mathbf{v}/\partial e$ в

точках переключения, вместо s следует подставить $\mathbf{p}_v \text{sign}(d\psi/dt)\psi_e$, а значение p_v в точке переключения равно не 1, а $(m/w)(1+p_m)$. В уравнениях (1.1.16), в соответствии с (1.7.1), (1.7.4), величину реактивного ускорения a следует заменить на P/m , и во всех уравнениях использовать ступенчатую функцию управления ε из (1.7.4).

Перечисленные изменения завершают математическую формулировку применения метода продолжения для случая постоянной реактивной тяги.

Некоторую техническую трудность представляет то, что дифференциальные уравнений для m , p_m и их частных производных записаны в виде уравнений первого порядка, в то время как остальные дифференциальные уравнения - в виде уравнений второго порядка. Конечно, полную систему дифференциальных уравнений можно привести к системе 1-го порядка. Однако, численные методы интегрирования систем 2-го порядка как правило эффективнее. Для формальной записи уравнений для m , p_m и их частных производных в виде дифференциальных уравнений 2-го порядка можно ввести переменные

$$m^s = \int m dt, \quad p_m^s = \int p_m dt. \quad (1.7.12)$$

Тогда

$$d^2 m^s / dt^2 = dm/dt, \quad d^2 p_m^s / dt^2 = dp_m/dt, \quad d(\partial m^s / \partial e) / dt = \partial m / \partial e, \quad d(\partial p_m^s / \partial e) / dt = \partial p_m / \partial e, \quad (1.7.13)$$

а $\partial m^s / \partial e$ и $\partial p_m^s / \partial e$ не испытывают разрывов непрерывности в точках переключения тяги. Поэтому, используя переменные (1.7.12), с учетом соотношений (1.7.13), полную систему дифференциальных уравнений можно записать в виде системы уравнений 2-го порядка. Дополнительные начальные условия, необходимые для переменных m^s и p_m^s , произвольны; в частности, они могут быть равны 0.

В качестве примера рассмотрим модельную задачу №1 из табл.1.1.3. Пусть КА снабжен двигательной установкой тягой 300 Н со скоростью истечения 10 км/с. Рассмотрим перелет в центральном гравитационном поле Земли (гравитационный параметр равен $398600 \text{ км}^3/\text{с}^2$). Начальное геоцентрическое удаление КА примем равным 8000 км. Результаты решения задачи минимизации расхода топлива при заданной начальной массе КА (1000 кг) приведены на рис.1.7.1, при этом конечная масса КА равна 817.6 кг, двигательная установка отключается во внутренних точках траектории при $t=1.703203$ и $t=4.916768$, а включается при $t=2.639372$ и $t=6.115678$ (время безразмерное). На рис.1.8.1 приведена оптимальная программа ориентации тяги (угол между вектором тяги и осью x инерциальной системы координат) и зависимость реактивного ускорения от безразмерного времени. Параметры, соответствующие порождающему ИР-решению показаны сплошной линией, а параметры полученного ПСИ-решения - крестиками. На рис.1.7.2. показаны аналогичные результаты для случая, когда задана конечная масса КА (850 кг). При этом начальная масса КА оказалась равна 1043.4 кг, а моменты переключения тяги имеют в моменты времени 1.814662, 4.974922 (отключение) и 2.563009, 6.038775 (включение). Затемненные полосы на верхних графиках рис.1.7.1 и 1.7.2 соответствуют интервалам времени, на которых двигательная установка КА при ПСИ-оптимальном управлении не работает.

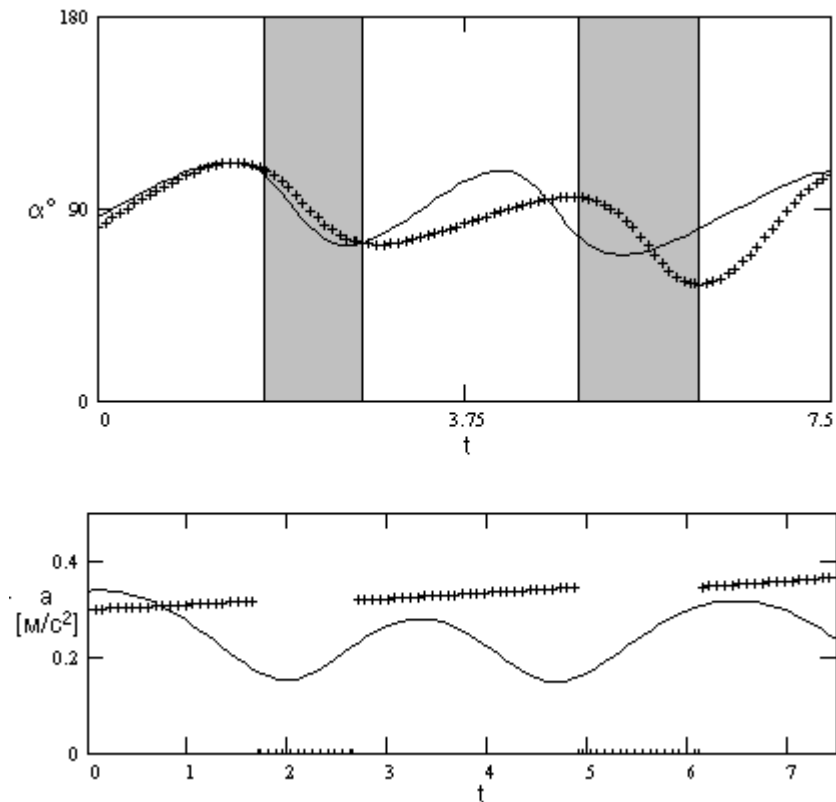


Рис. 1.7.1. Зависимость угла между осью x инерциальной системы координат и вектором тяги (вверху) и величины реактивного ускорения от безразмерного времени для задачи с заданной начальной массой КА. Параметры, относящиеся к ИР-решению отображены сплошной линией, а параметры ПСИ-решения - крестиками.

1.8. Задача об оптимальном по быстродействию перелете.

Небольшая модификация рассмотренного ранее метода продолжения позволяет продолжать ИР-решения в оптимальные по быстродействию ПСИ-решения и определять оптимальные по быстродействию ПСИ-решения при изменении величины тяги и удельного импульса двигательной установки.

Известно [14], что в задаче об оптимальном быстродействии двигательная установка не отключается: $\varepsilon(t) \equiv 0$. Поэтому скачков в дифференциальных уравнениях для элементов матрицы чувствительности нет.

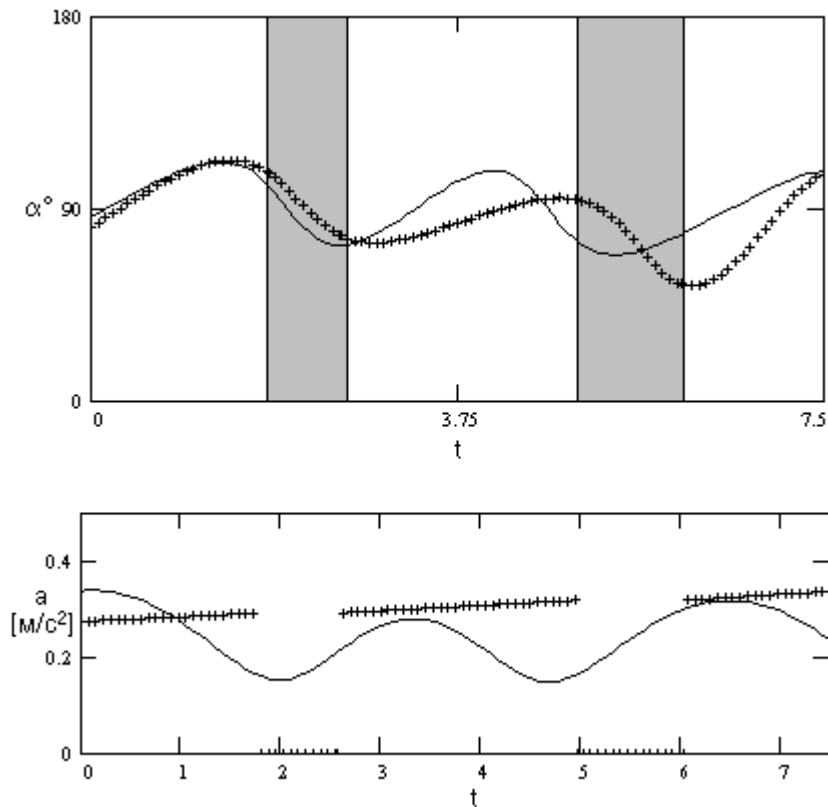


Рис. 1.7.2. Зависимость угла между осью x инерциальной системы координат и вектором тяги (вверху) и величины реактивного ускорения от безразмерного времени для задачи с заданной конечной массой КА. Параметры, относящиеся к ИР-решению отображены сплошной линией, а параметры ПСИ-решения - крестиками.

Постоянство работы ДУ позволяет рассматривать случай постоянной по величине реактивной тяги, как и случай постоянного по величине реактивного ускорения - без введения в рассмотрения седьмой фазовой координаты (текущей массы КА, характеристической скорости или моторного времени). В самом деле, так как моторное время в рассматриваемой задаче совпадает с физическим временем t , текущее реактивное ускорение можно представить в виде функции t :

$$a = \frac{a_0}{1 - \frac{a_0}{w}t}, \quad (1.8.1)$$

где a_0 - реактивное ускорение при $t=0$, w - скорость истечения.

С учетом сделанных замечаний, дифференциальные уравнения (1.1.16) для фазовых координат, сопряженного вектора и элементов матрицы чувствительности совпадают с аналогичными уравнениями для случая перелета с фиксированным временем.

Так как величина реактивного ускорения в рассматриваемой задаче является известной функцией времени, а его направление определяется единичным ортом в направлении $\mathbf{p}_v$: $a=a(t)\mathbf{p}_v/p_v$, то с учетом однородности дифференциального уравнения для $\mathbf{p}_v$, оказывается, что из шести параметров $\mathbf{p}_{v0}, \dot{\mathbf{p}}_{v0}$ существенными являются только пять (величина p_v в рассматриваемой задаче не имеет значения). Поэтому в некоторый момент времени должно выполняться некоторое условие нормировки вектора $\mathbf{p}_v$, например

$$\mathbf{p}_{v0}^T \mathbf{p}_{v0} = 1.$$

Однако, нормировка в начальный момент времени представляется неудобной, так как при ее использовании приходится вычислять вектор $\partial \mathbf{p}_{v0} / \partial T$. Поэтому более естественной оказывается нормировка на правом конце траектории, так как в этом случае аналогичная частная производная $\partial \mathbf{p}_{vk} / \partial T = d\mathbf{p}_{vk} / dt$ автоматически получается в результате интегрирования системы (1.1.16):

$$\mathbf{p}_{vk}^T \mathbf{p}_{vk} = 1, \quad (1.8.2)$$

а за недостающий параметр краевой задачи можно принять время перелета T . Нормировка (1.8.2) применима при любых граничных условиях, которые не оставляют свободными вектор скорости на правом конце траектории. В случае, если на вектор скорости не наложено никаких ограничений (как в задаче пролета), условия трансверсальности приводят к равенству $\mathbf{p}_{vk} = 0$, которое противоречит нормировке (1.8.2). Так как

задача оптимального по быстродействию полета (без выключения двигателя) является довольно специфической, анализ этого случая в работе не проводится.

С учетом сказанного, чтобы обеспечить условия нормировки (1.8.2) при $\tau=0$, выражение (1.1.21) $\mathbf{p}_v = \mathbf{p}_v^{\text{ИР}} / (k p_{v0}^{\text{ИР}})$ следует заменить на $\mathbf{p}_v = \mathbf{p}_v^{\text{ИР}} / p_{vk}^{\text{ИР}}$, а функции продолжения (1.1.22) представить в виде:

$$\varphi_1(\tau) = p_{vk}^{\text{ИР}} (1-\tau), \quad \varphi_2(\tau) = \tau.$$

За вектор невязок краевой задачи в рассматриваемом случае удобно принять вектор

$$\mathbf{f}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{p}_{vk}^T \mathbf{p}_{vk} - 1 \end{pmatrix}, \quad (1.8.3)$$

где $\mathbf{f}$ - вектор невязок краевой задачи об оптимальном перелете с фиксированным временем (например, (1.1.13) для задачи сопровождения). При этом вектор неизвестных параметров краевой задачи имеет размерность 7:

$$\mathbf{z}_T^T(\tau) = (\mathbf{p}_{v0}^T, \dot{\mathbf{p}}_{v0}^T, T) = (\mathbf{z}^T, T), \quad (1.8.4)$$

а дифференциальное уравнения метода продолжения имеет вид, аналогичный (1.1.15):

$$\frac{d\mathbf{z}_T}{dt} = -\mathbf{f}_{Tz_T}^T(\mathbf{z}_T) \left(\mathbf{b}_T + \frac{\partial \mathbf{f}_T}{\partial \tau} \right), \quad \mathbf{z}_T(0) = \mathbf{z}_{T0}, \quad (1.8.5)$$

где $\mathbf{b}_T = \mathbf{f}_T(\mathbf{z}_{T0}) = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_{T0} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_{Tz_T} = \begin{pmatrix} \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z} & \partial \mathbf{f} / \partial T \\ 2 \partial (\mathbf{p}_{vk}^T \mathbf{p}_{vk}) / \partial \mathbf{z} & 2 \mathbf{p}_{vk}^T \partial \mathbf{p}_{vk} / \partial T \end{pmatrix}$, T_0 -

начальное приближение для времени перелета (обычно время перелета в базовой ИР-задаче: $T_0 = T^{\text{ИР}}$, при этом, если в качестве $\mathbf{z}_0$ используется вектор решения этой базовой задачи, $\mathbf{b}=0$).

Явный вид вектора $\partial \mathbf{f} / \partial T$ для задачи сопровождения имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial T} - \frac{d\mathbf{x}_k(T)}{dT} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(T)}{\partial T} - \frac{d\mathbf{v}_k(T)}{dT} \end{pmatrix}$$

для задачи пролета, где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial T} &= \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=T}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(T)}{\partial T} \right) = \left\{ \Omega_{\mathbf{x}} + [\varphi_1(\tau) + a\varphi_2(\tau)/p_v] \mathbf{p}_v \right\} \Big|_{t=T}, \\ \frac{\partial \mathbf{p}_v(T)}{\partial T} &= \left. \dot{\mathbf{p}}_v \right|_{t=T}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_v}{\partial T} \right) = (\Omega_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{p}_v) \Big|_{t=T}. \end{aligned}$$

Предполагается, что условия на правом конце $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{v}_k$ могут зависеть от времени.

Для определения решения задачи об оптимальном по быстродействию перелете при изменении величины начального ускорения a_0 или скорости истечения w , можно использовать ту же процедуру продолжения с одной небольшой модификацией. Предположим, что вектор искомых параметров краевой задачи $\mathbf{z}_T(0)$ определен для некоторой зависимости $a(t)=a_1(t)$ (например, при помощи только что описанной процедуры продолжения из ИР-решения). Требуется получить решение для другой зависимости реактивного ускорения от времени $a=a_2(t)$, например для других значений P и w . Для этого можно использовать описанную выше процедуру, но с другими функциями продолжения φ_i :

$$\varphi_1(\tau)=0, \quad \varphi_2(\tau, t)=1+[a_2(t)/a_1(t)-1]\tau.$$

Необходимо отметить, что если процесс продолжения начинается с таких начальных значений параметров краевой задачи $\mathbf{z}_T(0)$, которые являются ее решением при $a(t)=a_1(t)$, то в процессе продолжения в силу дифференциальных уравнений (1.8.5) текущее значение вектора параметров краевой задачи $\mathbf{z}_T(\tau)$ будет решением этой задачи при

$a(t)=a_1(t)+[a_2(t)-a_1(t)]\tau$. Таким образом, определяется целое семейство решений краевых задач для $a(t)\in[a_1(t), a_2(t)]$.

Продолжение в задаче об оптимальном быстродействии является существенно более легкой задачей в сравнении с продолжением задачи о ПСИ-оптимальном перелете с фиксированным временем, так как, во-первых, решение задачи о быстродействии в центральном ньютоновском поле в общем случае существует для произвольного ненулевого реактивного ускорения и, во-вторых, не возникает проблем, связанных с разрывностью правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения при изменении числа активных участков и их расположения на траектории в процессе продолжения.

Рассмотрим в качестве примера модельную задачу №1 из табл.1.1.3, для которой в этой таблице приведены граничные условия, время перелета, величина ускорения для ПСИ-задачи и решения соответствующих ИР- и ПСИ-задач с фиксированным временем. При времени перелета $T=7.5$ и реактивном ускорении $a=0.05$, полученная продолжением из ИР-решения ПСИ-траектория содержит три активных участка, разделенных двумя пассивными. При продолжении этого же ИР-решения в оптимальное по быстродействию ПСИ-решения T уменьшается до величины 7.129661, при этом $\mathbf{p}_{v0}=(-1.058077, 0.2166380, 0)^T$, $d\mathbf{p}_{v0}/dt=(0.971690, 0.564190, 0)^T$. Величина реактивного ускорения на всем перелете постоянна и равна 0.05. На рис.1.8.1 представлена исходная ИР-траектория (пунктир) и полученная из нее оптимальная по быстродействию ПСИ-траектория (сплошная линия). Из рисунка видно, что ПСИ-траектория, как и следовало ожидать, проходит ближе к притягивающему центру.



Рис. 1.8.1. ИР-оптимальная траектория и ПСИ-траектория, оптимальная по быстродействию.

На рис.1.8.2 представлены графики зависимостей изменения угла ориентации тяги вдоль обеих траекторий. Видно, в отличие от задачи с фиксированным временем, большое расхождение между ИР- и ПСИ-решениями.

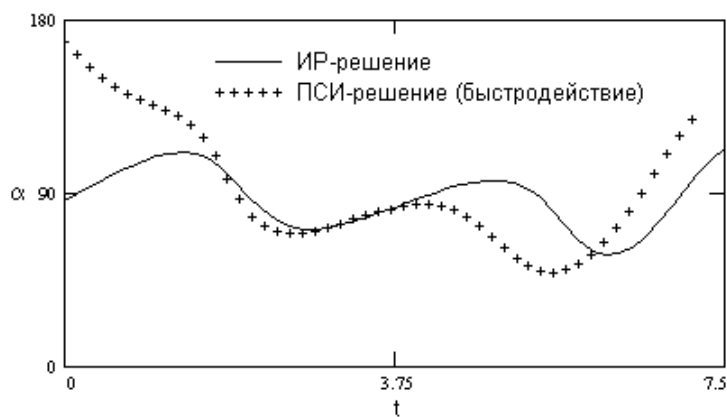


Рис. 1.8.2. Угол между вектором тяги и осью x на ИР-оптимальной траектории и ПСИ-траектории, оптимальной по быстродействию.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ДВУКРАТНО ОСРЕДНЕННОЙ ЗАДАЧЕ ХИЛЛА ПОД ВЛИЯНИЕМ МАЛОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО УСКОРЕНИЯ

Задача о движении центра масс КА с двигательной установкой малой тяги в центральном ньютоновском гравитационном поле достаточно хорошо исследована. Среди основных известных аналитических результатов в этой области следует отметить точное решение задачи о движении КА с постоянным по величине и направлению векторе реактивного ускорения (предельный вариант задачи двух неподвижных центров [77]), асимптотические решения для случаев постоянного по величине касательного [47] и трансверсального [37] и знакопеременного бинормального [37] ускорения, а также многочисленные асимптотические решения для различных частных программ реактивного ускорения и решения осредненных задач траекторной оптимизации в “локально-оптимальных” постановках [13, 14, 23, 28, 29, 37, 53, 56, 59, 60, 75] (когда программа изменения тяги на витке задается как функция конечного числа параметров, после чего уравнения движения осредняются, и траектория оптимизируется по этим параметрам, которые считаются медленно изменяющимися функциями управления). Важным результатом явилось также определение полной системы первых интегралов для осредненной задачи о плоском ИР-оптимальном перелете [89, 97] и другие асимптотические решения задач траекторной оптимизации [3, 70].

Несмотря на отсутствие в обозримом будущем возможности проведения полного качественного анализа управляемого движения центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле, наличие частных аналитических и асимптотических решений позволяет более осознанно подходить к задачам проектно-баллистического анализа, в частности, к

задачам выбора орбит, траекторий движения, программ управления и, конечно, к задачам численной оптимизации траекторий. Большой объем результатов, полученных в результате исследований задачи о движении КА с двигательной установкой малой тяги в центральном ньютоновском гравитационном поле подкрепляет физическую интуицию при анализе новых проектно-баллистических задач, позволяет делать обоснованные предположения о характере траектории, рациональной программе управления и, во многих случаях, достаточно просто получать оценки значений основных проектно-баллистических параметров, необходимых для решения данной задачи, существенно сужая тем самым диапазон их изменения при проведении трудоемкого численного анализа.

В ряде случаев, однако, предположение о центральности гравитационного поля не является приемлимым с точки зрения проведения проектно-баллистического анализа. К таким случаям относятся, в частности, задачи исследования перелетов к естественным спутникам планет (включая Луну) и к точкам либрации. В этих и в ряде других задач (выход из сферы действия планеты, гравитационные маневры, движение по квазиспутниковым орбитам и сильно вытянутым и удаленным спутниковым орбитам и т.д.) качественный и количественный анализ движения можно проводить в рамках ограниченной задачи трех тел. Так как орбиты большинства крупных небесных тел Солнечной системы близки к круговым, часто приемливой оказывается ограниченная круговая задача трех тел (ОКЗТТ).

Современное состояние вопроса об анализе движения КА с двигательной установкой малой тяги в рамках модели ОКЗТТ значительно менее продвинуто по сравнению с изучением управляемого движения в рамках модели задачи двух тел. Объясняется это, в основном неинтегрируемостью уравнений ОКЗТТ и связанными с этим трудностями их качественного и

количественного анализа. В предыдущие десятилетия наиболее важными прикладными задачами, требовавшими анализа ограниченной задачи трех тел, были задача исследования возмущенного движения искусственных спутников [1, 2, 8, 10-12, 15, 16-18, 25, 39, 56] и задача исследования перелетов к Луне с большой тягой. Эта последняя проблема была детально исследована численными и аналитическими методами [19, 20, 24, 29, 57, 61]; ее анализ включал исследование и классификацию пролетных траекторий, траекторий облета Луны с возвращением на Землю, задачу достижения Луны, задачу выведения КА на орбиту искусственного спутника Луны, задачу перелета от Луны к Земле, исследование периодических траекторий с многократным сближением с Луной, движение в окрестности точек либрации. Что касается траекторий полета к Луне КА с малой тягой, то этот вопрос исследовался в сильно упрощенной постановке (например, участок раскрутки в центральном поле Земли и участок скрутки в центральном поле Луны, сопряженные участком стыковки, на котором учитываются притяжение обоих небесных тел, [13, 23]), позволяющей говорить лишь об оценке основных массово-энергетических характеристик КА. Результаты некоторых недавних исследований показали необходимость обоснования такого рода оценок, так как в ряде случаев, они могут приводить к качественно неверным результатам. Так, в работе [26], показано существование устойчивых резонансных периодических орбит в задаче о спиральной раскрутке КА с малым касательным реактивным ускорением вокруг Земли, рассматриваемой в рамках модели ОКЗТТ Земля-Луна-КА, что может привести к “застреванию” КА в окрестности такой орбиты. В работах автора [51, 52, 101] показано существование тенденции к вырождению оскулирующей орбиты КА в отрезок прямой линии в процессе его скрутки или раскрутки вокруг одного из притягивающих центров ОКЗТТ, что

может привести к столкновению КА с центральным притягивающим телом. Таким образом, детальное изучение эволюции управляемого движения КА в рамках ОКЗТТ необходимо для проведения корректного проектно-баллистического анализа задач полета КА с двигательной установкой малой тяги к естественным спутникам планет.

При анализе траекторий выведения КА с малой тягой с орбиты искусственного спутника планеты на гелиоцентрическую траекторию традиционно применяется метод “нулевой стыковки” сфер действия, когда предполагается, что на припланетном участке КА движется в центральном поле планеты до набора параболической скорости, а гелиоцентрический участок начинается из точки, где в данный момент расположен центр масс этой планеты и с начальной гелиоцентрической скоростью КА, равной текущей гелиоцентрической скорости планеты. Однако, качественные отличия в эволюции спирального движения КА при наличии притяжения третьего тела, приводят к методическим ошибкам в определении начальных гелиоцентрических фазовых координат КА [34]. Аккуратный анализ этой задачи также требует исследования управляемого движения в рамках модели ОКЗТТ

Перечень причин необходимости рассмотрения управляемого движения КА с двигательной установкой малой тяги в рамках модели ОКЗТТ можно было бы существенно расширить. Но и из упомянутого выше, необходимость проведения такого анализа очевидна. Ввиду малочисленности аналитических результатов по исследованию динамики управляемого движения центра масс КА с малой тягой в рамках модели ОКЗТТ, возрастает их значение для понимания общей картины эволюции такого движения. Исследование частных случаев управляемого движения центра масс КА с малой тягой в рамках модели ОКЗТТ и составляет основное содержание второй главы.

Ввиду отсутствия аналитических частных решений ОКЗТТ, отличных от стационарных (точки либрации), приближенные методы анализа этой задачи имеют исключительно важное значение. Кроме методов, связанных с численным интегрированием дифференциальных уравнений движения, в небесной механике и механике космического полета нашли широкое применение методы поиска решений в виде рядов, в частности асимптотические методы. Несомненным преимуществом использования асимптотических методов перед численными является расширение возможности проведения качественного анализа поведения динамической системы, включая классификацию типов движения, анализ их ветвления и т.д. В задачах прогнозирования движения КА главным требованием является точность решений, что приводит к необходимости построения асимптотических разложений высокого порядка, учитывающих вековые, долго- и короткопериодические возмущения в движении КА [2, 15, 16]. В большинстве случаев, вековые возмущения вносят наибольший вклад в изменение параметров движения, поэтому их изучения бывает достаточно для предварительного качественного анализа [10-12, 17, 39].

Вековые возмущения - эволюцию орбитального движения КА - можно изучить используя метод осреднения [12, 16], с помощью которого определяется первый член асимптотического решения. Как известно, неавтономные динамические системы с вращающейся фазой (какой и является рассматриваемая задача) допускают два варианта схем осреднения: нерезонансный и резонансный. Эволюционные уравнения в первом случае можно получить осредняя уравнения движения независимо по средней аномалии КА M и времени t , а во втором - путем введения аномалии Делоне $D = k_1 M - k_2 t$, замены времени в уравнениях движения тождественной линейной комбинацией D и M и последующего осреднения уравнений движения по M (здесь k_1 и k_2 - целые положительные числа,

определяющие изучаемый резонанс: $k_1 dM/dt - k_2 = 0$). Первая из указанных схем осреднения известна в небесной механике как схема Гаусса, а вторая - как схема Делоне-Хилла [16].

Известно большое количество работ по эволюции пассивного движения в рамках ОКЗТТ [10-12, 17, 39]. В то же время качественный анализ эволюции орбитального движения КА под совместным влиянием притяжения удаленного небесного тела и малой реактивной тяги асимптотическими методами ранее практически не проводился.

Настоящая глава посвящена исследованию эволюции нерезонансного движения КА с двигательной установкой малой тяги в рамках модели ОКЗТТ.

2.1. Эволюционные уравнения и их редукция

Рассмотрим неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс основного притягивающего тела. Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты возмущающего притягивающего тела. Движение КА будем описывать оскулирующими кеплеровскими элементами для случая эллиптического движения: a - большая полуось, e - эксцентриситет, ω - аргумент перицентра, i - наклонение, Ω - долгота восходящего узла, M - средняя аномалия.

Введем следующие допущения:

1. Орбита возмущающего притягивающего тела является круговой.
2. Модуль радиус-вектора КА r в системе координат $Oxyz$ на всем интервале движения много меньше расстояния Δ между притягивающими телами.
3. Средние движения возмущающего тела и КА рационально несоизмеримы.

4. На КА действуют только силы притяжения центрального и возмущающего небесных тел и реактивная тяга, создающая постоянное по величине трансверсальное (в системе координат $Oxyz$) реактивное ускорение.

За единицу расстояния примем величину Δ , а за единицу времени - величину, обратную среднему движению возмущающего тела. Тогда уравнения движения КА принимают вид [63]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2\alpha \sqrt{\frac{p}{\mu_1}} \frac{a^2}{r} + 2\sqrt{\frac{a}{\mu_1}} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \alpha \sqrt{\frac{p}{\mu_1}} (\cos v + \cos E) + \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu_1 a}} \left(\sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \\ \frac{d\omega}{dt} &= \alpha \sqrt{\frac{p}{\mu_1}} \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) + \sqrt{\frac{1-e^2}{\mu_1 a}} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial i} \right), \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu_1 p}} \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} \cos i - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu_1 p}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dM}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu_1}{a^3}} - \frac{\alpha p}{\sqrt{\mu_1 a}} \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) - \frac{1}{\sqrt{\mu_1 a}} \left(2a \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial R}{\partial e} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где $\mu_1 = m_1/(m_0 + m_1)$, m_1 - масса центрального тела, m_0 - масса возмущающего тела, p , v , E - фокальный параметр орбиты, истинная и эксцентрическая аномалии КА соответственно, α - величина реактивного ускорения, R - возмущающая функция.

Известно [1, 2, 16, 18, 63, 64, 71], что в случае $r < 1$ гравитационную возмущающую функцию можно представить в виде:

$$R = \mu \sum_{n=2}^{\infty} r^n P_n(\cos H),$$

где $P_n(x)$ - полиномы Лежандра, а H - угол КА- центральное тело - возмущающее тело.

Учитывая принятые допущения, можно ограничиться первым членом разложения R в ряд по степеням r . Известно, что для круговой задачи трех тел двукратное осреднение по средним аномалиям возмущающего и возмущаемого тел в этом случае приводит к выражению [10, 39]:

$$W = \frac{\mu a^2}{4} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i + \frac{3}{2} e^2 \left[1 + \sin^2 i (1 - 5 \sin^2 \omega) \right] \right\}, \quad (2.2)$$

где $\mu = 1 - \mu_1$.

После подстановки (2) вместо R в (1) и осреднения по M членов, обусловленных наличием трансверсального ускорения α , система для медленных переменных принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2\alpha a \sqrt{\frac{p}{\mu_1}}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{3}{2} \alpha e \sqrt{\frac{p}{\mu_1}} - \frac{1}{ea} \sqrt{\frac{p}{\mu_1}} \frac{\partial W}{\partial \omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{p}{\mu_1}} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial W}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{1 - e^2} \frac{\partial W}{\partial i} \right), \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu_1 p}} \frac{\partial W}{\partial \omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu_1 p}} \frac{\partial W}{\partial i}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

При $\alpha=0$ получаем известные двукратно осредненные уравнения задачи Хилла, общее решение которого определяется тремя интегралами [10, 39]:

$$a = c_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1, \quad W = c_2.$$

При $W \equiv 0$ ($\mu=0$) система (3) переходит в осредненные уравнения движения КА с постоянным трансверсальным ускорением в центральном гравитационном поле. Уравнения фазовой траектории такой системы имеют вид [37]:

$$e = e_0 (a_0/a)^{3/4}, \quad \omega = \omega_0, \quad i = i_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad (2.4)$$

где индексом “0” обозначены начальные значения соответствующих элементов.

В общем случае система (3) неинтегрируема. Для ее упрощения перейдем к новой независимой переменной $x = \mu a / \alpha$. Это, очевидно, всегда возможно при $0 \leq e < 1$, $0 < a < \infty$, $\mu \neq 0$, $\alpha \neq 0$. С учетом (2), уравнения (3) преобразуются к системе третьего порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dx} &= -\frac{3e}{4x} + \frac{15}{16} e \sin^2 i \sin 2\omega, \\ \frac{d\omega}{dx} &= \frac{3}{8} \left(2 - 5 \sin^2 \omega \frac{\sin^2 i - e^2}{1 - e^2} \right), \\ \frac{di}{dx} &= -\frac{15}{32} \frac{e^2}{1 - e^2} \sin 2i \sin 2\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

и к уравнению для Ω

$$\frac{d\Omega}{dx} = -\frac{3}{8} \frac{\cos i}{1 - e^2} \left[1 - e^2 (1 - 5 \sin^2 \omega) \right], \quad (2.6)$$

решение которого определяется квадратурой после нахождения решения системы (5).

Сделаем два важных замечания. Во-первых, правые части уравнений (5), (6) не зависят от каких-либо параметров. Следовательно, поведение системы целиком определяется начальными значениями оскулирующих элементов при фиксированном значении x_0 , и полученные интегральные кривые системы (5), (6) являются фазовыми траекториями системы (3) при любых значениях параметров α и μ_1 . Во-вторых, в системе (5), (6) механический смысл имеет продолжение решения только в одну сторону от x_0 . В самом деле, при $x_0 > 0$ $\alpha > 0$. При этом правая часть первого уравнения (3) положительно определена, а, значит, большая полуось и $x = \mu a / \alpha$ монотонно возрастают. Таким образом, движение происходит в области $a_0 \leq a < \infty$, то есть при $x_0 \leq x < \infty$. Рассмотренный случай соответствует раскрутке КА вокруг центрального притягивающего тела. Аналогичные

соображения приводят к выводу, что при скрутке ($x_0 < 0$, $\alpha < 0$) движение происходит в области $x_0 \leq x < 0$ ($0 < a \leq a_0$).

2.2. Частные решения

Система (5) допускает по крайней мере три частных решения: $i=0$, $e=0$, $i=\pi/2$ (случаи прямого и обратного движения в двукратно осредненной задаче эквивалентны).

2.2.1. Плоская задача

Если $i=0$, то из (5) следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dx} &= -\frac{3e}{4x}, \\ \frac{d\omega}{dx} &= \frac{3}{8} \left(2 + \frac{5e^2}{1-e^2} \sin^2 \omega \right). \end{aligned} \right\}$$

Проекция на плоскость (a, e) интегральной кривой этой системы имеет вид, аналогичный случаю движения в центральном гравитационном поле (первое равенство в (4)). Различие заключается в поведении линии апсид. Подставляя зависимость $e(x)$ в правую часть дифференциального уравнения для аргумента перицентра и проводя замену $u = \operatorname{tg} \omega$, приходим к уравнению Риккати

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{b^2}{x^{3/2} - b^2} \right) u^2 - \frac{3}{4},$$

где $b^2 = e_0^2 x_0^{3/2}$.

2.2.2. Круговые орбиты.

При $e_0=0$ известно решение осредненной задачи движения с трансверсальным ускорением в центральном гравитационном поле, представляющее из себя движение по оскулирующим круговым орбитам с

монотонно изменяющейся большой полуосью [37], при этом все другие элементы остаются неизменными. Как следует из (5), (6), в рассматриваемой задаче эксцентриситет и наклонение сохраняют свои значения, а линия узлов прецессирует по закону

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{8}(x - x_0)\cos i.$$

2.2.3. Полярные орбиты.

При $i=\pi/2$ из (5), (6) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dx} &= -\frac{3e}{4x} + \frac{15}{16}e \sin 2\omega, \\ \frac{d\omega}{dx} &= \frac{3}{16}(5\cos 2\omega - 1), \\ \frac{di}{dx} &= \frac{d\Omega}{dx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Из второго уравнения (7) следует существование стационарных значений ω :

$$\omega_{ci} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{5}.$$

Очевидно, что $\omega_{c1} \approx 39.23^\circ$ и $\omega_{c3} \approx -140.77^\circ$ устойчивы, а $\omega_{c2} \approx 140.77^\circ$ и $\omega_{c4} \approx -39.23^\circ$ неустойчивы. При $\omega = \omega_{ci}$ первое уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{de}{dx} = \frac{3}{4} \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{x} \right) e,$$

причем знак “+” соответствует устойчивым стационарным значениям ω . Выпишем общее решение этого уравнения:

$$e = bx^{-3/4} \exp \left[\pm \frac{3\sqrt{6}}{8}(x - x_0) \right].$$

где b определено выше, при рассмотрении случая плоского движения ($b^2 = e_0^2 x_0^{3/2}$).

Для неустойчивых стационарных значений ω эксцентриситет уменьшается с ростом a , как и при движении в центральном гравитационном поле [37].

Если же $\omega=\omega_{c1}$ или $\omega=\omega_{c3}$, то функция $e(a)$ имеет минимум при $a^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{\mu}$,

после прохождения которого эксцентриситет увеличивается, достигая значения $e=1$ при конечном значении a . Это означает, что оскулирующая орбита вырождается в отрезок прямой длиной $2a$, одной из граничных точек которого является притягивающий центр. Это явление аналогично явлению вырождения орбиты, обнаруженному в [10, 11, 39] для задачи Хилла и ограниченной круговой задачи трех тел при $\alpha=0$. Парадоксальность ситуации заключается в том, что столкновение КА с центральным притягивающим телом происходит несмотря на монотонное увеличение энергии орбитального движения КА.

При $\omega \neq \omega_{ci}$ общее решение системы (7) будет следующим:

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{A-1}{A+1}, \quad e = bx^{-3/4} \sqrt{\frac{A+A^{-1}+0.4}{c+c^{-1}+0.4}}, \quad (2.8)$$

где $A = c \exp \frac{3\sqrt{6}}{4}(x-x_0)$, $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} \operatorname{tg} \omega_0}{\sqrt{2} - \sqrt{3} \operatorname{tg} \omega_0}$.

2.3. Качественное исследование движения по полярным орбитам

Так как $\omega=\omega(x, x_0, c)$, а первое уравнение (7) линейно и однородно по e , то характер изменения эксцентриситета полностью определяется положением начальной точки на плоскости (c, x_0) . Из общего решения для e (8) видно, что $e(x)$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow \infty$ или при $x \rightarrow 0$. Таким образом, в общем случае движения по полярной орбите, ее вырождение в отрезок прямой линии происходит как при торможении, так и при разгоне (за исключением рассмотренного ранее

частного решения, соответствующего неустойчивым стационарным значениям аргумента перицентра).

Следовательно, классификация типов траекторий сводится к рассмотрению вопроса о существовании экстремумов решения (8). Из условия $de/dx=0$ с учетом (7), (8) получим

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{0.4A+2}{A^2-1} \right) = \Phi(x, x_0, c). \quad (2.9)$$

Функция $\Phi(x)$ имеет разрыв второго рода в точке $x_1 = x_0 - \frac{4}{3\sqrt{6}} \ln|c|$ и аналитична на интервалах $I_1=(-\infty, x_1)$ и $I_2=(x_1, \infty)$. При $c>0$ $\Phi(x)$ монотонна на интервалах непрерывности, а при $c<0$ имеет экстремумы при $x = x_0 + \frac{4}{3\sqrt{6}} \ln \frac{5 \mp \sqrt{24}}{|c|}$.

Справедлива следующая

Теорема. Уравнение (9) имеет ровно по одному действительному корню на каждом интервале непрерывности I_1 и I_2 функции $\Phi(x, x_0, c)$.

В самом деле, на интервале I_1 происходит смена знака функции x - $\Phi(x)$, так как при $x \rightarrow x_1$ $\Phi(x) \rightarrow -\infty$, а при $x \rightarrow -\infty$ $\Phi(x) \rightarrow -\sqrt{2/3}$. Аналогично, имеет место смена знаков и на интервале I_2 , так как $\Phi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_1$ и $\Phi(x) \rightarrow \sqrt{2/3}$ при $x \rightarrow \infty$. Учитывая непрерывность $\Phi(x)$ на I_1 и I_2 , заключаем, что на этих интервалах существует по крайней мере по одному корню уравнения (9). Кроме того, очевидно следующее утверждение:

Пусть $\Phi(x)$ - гладкая функция на интервале I . Тогда для того, чтобы уравнение (9) на I имело более одного действительного корня, необходимо существование хотя бы одного действительного корня уравнения $d\Phi/dx=1$ на этом интервале.

Уравнение $d\Phi/dx=1$ с учетом выражения для $A(x)$ сводится к возвратному уравнению четвертой степени

$$5A^4 + 3A^3 + 20A^2 + 3A + 5 = 0,$$

которое не имеет действительных корней. Теорема доказана.

В силу того, что решение продолжается только в одну сторону от x_0 , точка x^* , для которой $de/dx|_{x=x^*} = 0$, может лежать или не лежать на фазовой траектории. Нетрудно показать, что кривая

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{0.4c + 2}{c^2 - 1} \right)$$

разбивает плоскость параметров (c, x_0) на области с различными типами движения. Это разбиение с указанием типов зависимостей $e(a)$ приведено на рис.2.1 (знаки de/da и de/dx совпадают и определяются знаком функции $(x-\Phi)/x\Phi$). Перечислим типы:

1. $\alpha > 0$ (раскрутка)

- A_1 - монотонное увеличение эксцентриситета,
- A_2 - зависимость $e(a)$ имеет точку минимума,
- A_3 - особое решение, соответствующее $c = 0$ ($\omega = \omega_{c2,4}$),
монотонное уменьшение эксцентриситета.

2. $\alpha < 0$ (скрутка)

- D_1 - монотонное увеличение эксцентриситета,
- D_2 - зависимость $e(a)$ имеет точку минимума.

При $x_0 > 0$ и $c \rightarrow 0$ критическое значение большой полуоси a^* , при котором $de/da = 0$, стремится к бесконечности, то есть происходит переход из класса A_1 в класс A_3 . При $x_0 < -\sqrt{2/3}$ и $c \rightarrow 0$ $a^* \rightarrow -\sqrt{2/3} \alpha/\mu$, а при $x_0 > 0$ и $c \rightarrow \pm\infty$ $a^* \rightarrow \sqrt{2/3} \alpha/\mu$. Перечисленные предельные переходы соответствуют стационарным положениям линии апсид $\omega = \omega_{ci}$. Для всех начальных условий, кроме $c = 0$ ($\omega = \omega_{c2,4}$), аргумент перицентра стремится к одной из устойчивых стационарных точек ω_{c1} или ω_{c3} .

Теперь несколько замечаний об устойчивости плоскости орбиты при $i = \pi/2$.

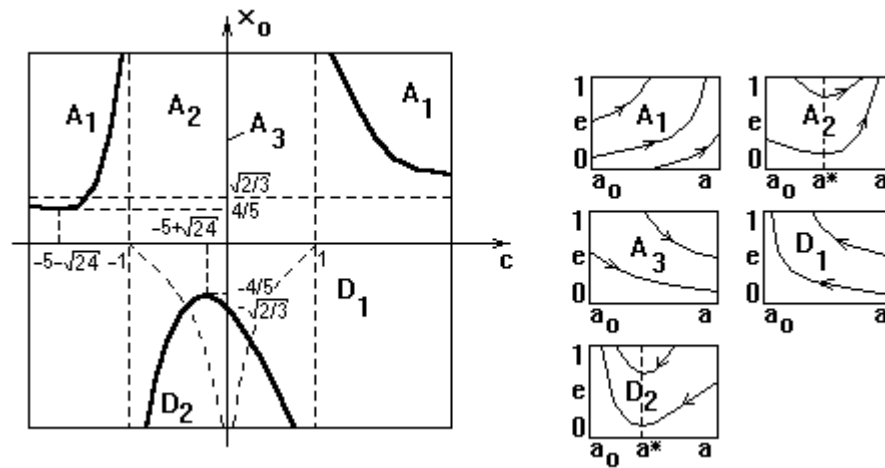


Рис. 2.1. Разбиение плоскости параметров (c, x_0) на области с различными типами траекторий.

Запишем дифференциальное уравнение для $\delta = i - \pi/2$. Как следует из (5),

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{15}{32} \frac{e^2}{1 - e^2} \sin 2\delta \sin 2\omega. \quad (2.10)$$

Уравнения (7) при $\delta \neq 0$ отличаются от первых двух уравнений системы (5) на величину порядка δ^2 , следовательно, (7) совпадают с соответствующими уравнениями (5), линеаризованными относительно δ . Уравнение (10) имеет устойчивое в линейном приближении тривиальное решение только при $\sin 2\omega < 0$. Но это условие эквивалентно неравенству $\Phi(x) < 0$ или $x < x_0 - 4 \ln|c|/3\sqrt{6}$. Отсюда следует, что решение $i \equiv \pi/2$ при $\alpha > 0$ устойчиво в первом приближении только для траекторий типа A_3 ($c=0$). Для траекторий A_2 линейная устойчивость по δ может иметь место только при $a_0 \leq a < a_1$, где $a_1 = \alpha/\mu(x_0 - 4 \ln|c|/3\sqrt{6})$. При движении по траекториям A_1 всегда имеет место неустойчивость по δ . Для случая $\alpha < 0$ решение $i \equiv \pi/2$ устойчиво для

$$x_0 > \frac{4}{3\sqrt{6}} \ln|c|, \quad (2.11)$$

что может быть только при $|c| < 1$. На рис. 1 эта область заключена между двумя кривыми штриховыми линиями в нижней части графика.

Если $|c| < 1$, но условие (11) не выполняется, то после прохождения значения a_1 ориентация плоскости орбиты становится неустойчивой по наклону.

2.4. Эволюция движения КА по околокруговым орбитам.

Других точных решений задачи найти не удалось. Представляет, однако, определенный интерес построение приближенного решения эволюционной задачи для практически важного случая околокруговых орбит.

2.4.1. Линеаризация

Предположим, что КА движется по слабоэллиптической орбите, что позволяет пренебречь в правых частях эволюционных уравнений членами порядка e^2 и выше. Линеаризация уравнений движения с трансверсальным ускорением (5), (6) приводит к системе

$$\frac{de}{dx} = -\frac{3}{4} \frac{e}{x} + \frac{15}{16} e \sin^2 i \sin 2\omega, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{3}{8} (2 - 5 \sin^2 i \sin^2 \omega), \quad (2.13)$$

$$\frac{di}{dx} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dx} = -\frac{3}{8} \cos i. \quad (2.14)$$

Из уравнений (14) следует

$$i = i_0 = \text{const}, \quad \Omega = \Omega_0 - \frac{3}{8} \cos i_0 \cdot (t - t_0), \quad (2.15)$$

где индексом "0" обозначены начальные значения элементов орбиты КА при $t=t_0$.

Уравнение (13) интегрируется в явном виде, а после подстановки его решений в (12) это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dx} = -\frac{3}{4x} + \varphi(x, \omega_0) \quad (2.16)$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$e = e_0 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \Phi(x, x_0, \omega_0) \quad (2.17)$$

где

$$\Phi(x, x_0, \omega_0) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \varphi(x, \omega_0) dx \right\} \quad (2.18)$$

Для классификации решений эволюционной системы достаточно рассмотреть все ветви решений дифференциального уравнения для аргумента перицентра (13) и проанализировать свойства решений (17).

2.4.2. Решение со стационарным значением аргумента перицентра

Уравнение (13) имеет стационарное решение

$$\omega = \omega_0 = \pm \sqrt{\arcsin \frac{2}{5 \sin^2 i_0}}. \quad (2.19)$$

Подстановка (19) в (18) приводит к следующему выражению для Φ :

$$\Phi(x, x_0, \omega_0) = \exp \left\langle \pm \frac{3}{8} \sqrt{10 \sin^2 i_0 - 4} \cdot (x - x_0) \right\rangle. \quad (2.20)$$

Знак "+" соответствует $\omega \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$, а знак "-" - $\omega \in [\pi/2, \pi] \cup [3\pi/2, 2\pi]$.

Это решение существует при $\sin^2 i_0 \geq 2/5$. Наклонение $i_c = [\arcsin \sqrt{2/5}] \approx 39.23^\circ$ назовем критическим. Анализ уравнения (17) в данном случае позволяет сделать вывод, что с увеличением x эксцентриситет монотонно убывает при $\omega \in [\pi/2, \pi] \cup [3\pi/2, 2\pi]$ и имеет точку минимума в точке $x^* = 32 / (9\sqrt{10 \sin^2 i_0 - 4})$ в противном случае (рис. 2.2.2а).

2.4.3. Решение с критическим наклоном

При $i_0 = i_c$ решение уравнения (11) имеет вид:

$$\omega = \arctg \left\langle \operatorname{tg} \omega_0 + \frac{3}{4}(x - x_0) \right\rangle. \quad (2.21)$$

Соответственно, функцию Φ после вычисления соответствующих интегралов, можно привести к виду

$$\Phi(x, x_0, \omega_0) = \left| 1 + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega_0} \left\langle \frac{9}{16}(x - x_0)^2 + \frac{3}{2}(x - x_0) \operatorname{tg} \omega_0 \right\rangle \right|^{2/3}. \quad (2.22)$$

При трансверсальном ускорении e стремится к асимптотическому значению при увеличении x :

$$e^* = \lim_{x \rightarrow \infty} e = e_0 x_0^{3/4} \left\langle \frac{9}{16(1 + \operatorname{tg}^2 \omega_0)} \right\rangle$$

(рис. 2.2.2б).

2.4.4. Решения с наклоном меньше критического

При $i < i_c$

$$\omega = \arctg [A_1 \operatorname{tg}(b_1 x + B_1)], \quad (2.23)$$

где $A_1 = \sqrt{2/(2 - 5 \sin^2 i_0)}$, $b_1 = \sqrt{9(2 - 5 \sin^2 i_0)/32}$, $B_1 = \arctg \frac{\operatorname{tg} \omega_0}{A_1} - b_1 x_0$.

При этом

$$\Phi(x, x_0, \omega_0) = \sqrt{\frac{2 - 5 \sin^2 i_0 \cos^2(b_1 x + B_1)}{2 - 5 \sin^2 i_0 \cos^2(b_1 x_0 + B_1)}}. \quad (2.24)$$

Среднее значение эксцентриситета убывает с увеличением x . Интересно отметить, что на монотонное уменьшение среднего значения эксцентриситета наложены колебания с периодом $T = \pi/b_1$, так что в

отдельных областях, в зависимости от начальных условий, текущее значение ϵ может превосходить начальное (рис. 2.2.2в).

2.4.5. Решения с наклоном больше критического

При $i > i_c$ существуют 2 области с различным видом решения, разделяемые на плоскости (ω_0, i_0) кривой

$$\sin^2 \omega_0 = \frac{2}{5 \sin^2 i_0}.$$

При $\sin^2 \omega_0 < \frac{2}{5 \sin^2 i_0}$

$$\omega = \operatorname{arctg}[A_2 \operatorname{th}(b_2 + B_2)], \quad (2.25)$$

где

$$A_2 = \sqrt{2/(5 \sin^2 i_0 - 2)}, \quad b_2 = \sqrt{9(5 \sin^2 i_0 - 2)/32}, \quad B_2 = \operatorname{Arth} \frac{\operatorname{tg} \omega_0}{A_2} - b_2 x_0,$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, x_0, \omega_0) = & \exp[-b_2(x - x_0)] \times \\ & \times \left| \frac{(1 + A_2^2) \exp 2(b_2 x + B_2) + 2(1 - A_2^2) \exp(b_2 x + B_2) + 1 + A_2^2}{(1 + A_2^2) \exp 2(b_2 x_0 + B_2) + 2(1 - A_2^2) \exp(b_2 x_0 + B_2) + 1 + A_2^2} \right| \end{aligned} \quad (2.26)$$

В противном случае, при $\sin^2 \omega_0 > \frac{2}{5 \sin^2 i_0}$

$$\omega = \operatorname{arctg}[A_2 \operatorname{cth}(b_2 + B_3)], \quad (2.27)$$

где

$$B_3 = \operatorname{Arcth} \frac{\operatorname{tg} \omega_0}{A_2} - b_2 x_0,$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, x_0, \omega_0) = & \exp[-b_2(x - x_0)] \times \\ & \times \left| \frac{(A_2^2 + 1) \exp 2(b_2 x + B_3) + 2(A_2^2 - 1) \exp(b_2 x + B_3) + A_2^2 + 1}{(A_2^2 + 1) \exp 2(b_2 x_0 + B_3) + 2(A_2^2 - 1) \exp(b_2 x_0 + B_3) + A_2^2 + 1} \right| \end{aligned} \quad (2.28)$$

Эксцентриситет в этих областях либо монотонно убывает, либо имеет точку минимума (рис. 2.2.2г).

2.4.6. Анализ результатов

На рис. 2.2 представлено разбиение параметрической плоскости $(\sin^2 \omega_0, \sin^2 i_0)$ на области с разными типами движения. Характер изменения эксцентриситета при раскрутке КА представлен на рис. 1а-1г, а формулы для $e(x)$ определяются подстановкой соответствующего выражения для $\Phi(x, x_0, \omega_0)$ в (17). Всего существуют 3 области с различными типами движения, которые разделяются границами

$$\sin^2 i_0 = 2/5 \quad (2.29)$$

и

$$\sin^2 i_0 = 2 / (5 \sin^2 \omega_0). \quad (2.30)$$

Граница (29) (критическое наклонение) отделяет область, характеризующуюся уменьшением эксцентриситета с увеличением x от области, в которой e неограниченно растет при разгоне. Следует отметить, что при существенном возрастании e предположение о малости эксцентриситета перестает быть верным и мы выходим за рамки рассматриваемой модели. При наклонении, меньшем критического, эксцентриситет остается малым на всем времени эволюции орбиты, пока еще справедливы допущения, обосновывающие возможность применения схемы осреднения Гаусса. Интересным фактом является осцилляция решений эволюционных уравнений в этой области. На самой границе (29) эксцентриситет стремится к предельному значению $e^*(x_0, e_0, \omega_0)$.

Граница (30) разделяет 2 области с различными видами решений, характеризующимися неограниченным возрастанием эксцентриситета при раскрутке. Интересно отметить, что на самой границе (30) существуют решения, соответствующие монотонному уменьшению эксцентриситета.

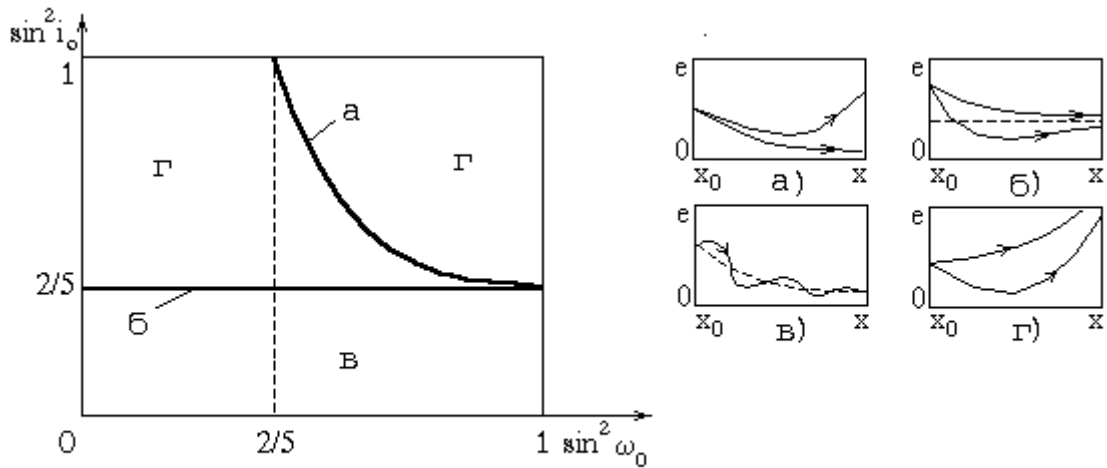


Рис. 2.2. Разбиение параметрической плоскости на области с различными типами движения.

2.5. Область применимости решений двукратно осредненной задачи

Так как в процессе движения модуль радиус-вектора перицентра орбиты КА не может быть меньше радиуса центрального притягивающего тела R_1 , вокруг которого он обращается, то естественным ограничением решений является условие

$$e < 1 - R_1/a. \quad (2.31)$$

Кроме того, полученное решение основывалось на допущении, что оскулирующая орбита КА является эллиптической. Однако в случае раскрутки возможен набор параболической скорости, при этом решения двукратно осредненной задачи становятся неприменимы. Минимальная разность между местной параболической скоростью и скоростью в эллиптическом движении достигается в перицентре оскулирующей орбиты и равна

$$\Delta V_\pi = \sqrt{\frac{\mu_1}{a(1-e)}} (\sqrt{2} - \sqrt{1+e}).$$

Область применимости результатов (8) можно оценить по условию: приращение характеристической скорости на витке оскулирующей орбиты должно быть меньше ΔV_π . Отсюда получим

$$a^2 < \frac{\mu_1}{2\pi\alpha} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}. \quad (2.32)$$

Другой оценкой области применимости (8) может служить устойчивость движения по Хиллу [61]. Движение устойчиво по Хиллу, если выполняется неравенство $2U - C^* \geq 0$, где U - силовая функция задачи, C^* - критическое значение постоянной Якоби, соответствующее кривой нулевой скорости, проходящей через коллинеарную точку либрации L_2 , лежащую внутри отрезка прямой, соединяющей притягивающие центры. При невыполнении этого условия появляется возможность выхода из окрестности центрального притягивающего тела через горловину в окрестности L_2 [61]. Для задачи Хилла выражение для U имеет вид [61]:

$$U = \mu_1 \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1} \right) + \frac{3}{2} (1 - \mu_1) (1 + r_1^2 \cos^2 \theta),$$

где r_1 - удаление КА от центрального притягивающего тела, θ - угол между радиус-векторами КА и возмущающего тела. Уравнение $2U - C^* = 0$ приводит к выражению

$$[\mu_1 + 3(1 - \mu_1) \cos^2 \theta] r_1^3 + [3(1 - \mu_1) - C^*(\mu_1)] r_1 + 2\mu_1 = 0. \quad (2.33)$$

При малых r_1 хорошим приближением корня этого уравнения является

$$r_1^{(0)} \approx \frac{2\mu_1}{C^*(\mu_1) - 3(1 - \mu_1)}.$$

Движение будет устойчивым по Хиллу, если $r < r_1^*$, где r_1^* - корень уравнения (33), то есть при

$$e \leq \frac{r_1^*}{a} - 1. \quad (2.34)$$

Практически, в качестве r_1^* можно принять расстояние от центрального притягивающего тела до точки либрации L_2 .

Кривые, ограничивающие области (31), (32), (34) (в случае, когда за r_1^* принято расстояние между притягивающим центром и точкой либрации L_2) приведены на рис.2.3 (центральное притягивающее тело - Ио, возмущающее тело - Юпитер, величина реактивного ускорения 1 мм/с^2) и рис. 2.4 (центральное притягивающее тело - Луна, возмущающее тело - Земля, величина реактивного ускорения 0.2 мм/с^2). Кривая γ_1 ограничивает область, в которой траектории движения КА целиком лежат над поверхностью центрального тела (область (31)), γ_2 - область, в которой приращение характеристической скорости за виток менее минимальной разницы между местной параболической и текущей скоростью КА (область (32)), кривая γ_3 соответствует равенству радиуса оскулирующего апоцентра КА расстоянию от притягивающего центра до точки L_2 (случай равенства в (34)). “Запрещенные” области движения КА обозначены серым цветом.

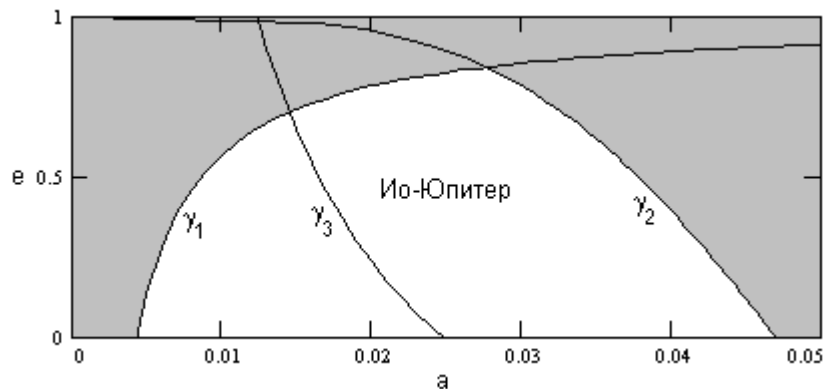


Рис. 2.3. Оценка области применимости решений осредненных уравнений для системы Ио-Юпитер при величине реактивного ускорения 1 мм/с^2 .

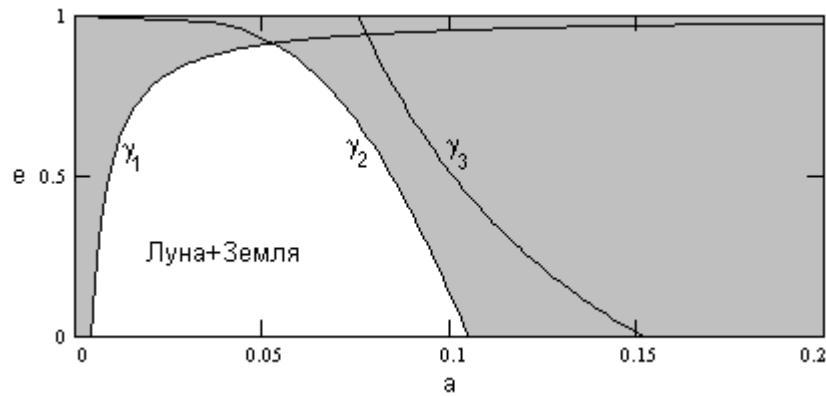


Рис. 2.4. Оценка области применимости решений осредненных уравнений для системы Луна-Земля при величине реактивного ускорения 0.2 мм/с^2 .

2.6. Численные результаты

Полученные аналитические решения сравнивались с результатами численного интегрирования неосредненных уравнений движения. В большинстве случаев, когда траектория КА не пересекает области орбитальных резонансов 1:1, 2:3, 1:2, методическая ошибка оказалась в пределах нескольких процентов, что является вполне удовлетворительным для проведения проектно-баллистического анализа. На основе полученных результатов реализовано программное обеспечение для расчета траекторий скрутки/раскрутки КА в окрестности естественных спутников планет.

На рис. 2.5 приведены результаты сравнения расчета движения КА по формуле (8) с численным интегрированием точных уравнений движения КА с малым трансверсальным ускорением в задаче Хилла. Рассматривалась раскрутка КА вокруг Ио по полярной орбите с начальным эксцентриситетом 0.1 и начальным значением большой полуоси 0.005 (2108 км), предполагалось, что линия апсид начальной орбиты лежит в плоскости орбиты Ио (кривые ζ_1, ξ_1) или наклонена к ней на 15.2° (кривые ζ_2, ξ_2), а ее апоцентр направлен от Юпитера. Наклонение начальной орбиты равно 90° , а долгота восходящего узла

равна 0. При численном интегрировании принималось, что движение КА начинается из оскулирующего перицентра, а Юпитер расположен в точке (1,0,0) безразмерной иоцентрической системы координат в начальный момент времени. Величина реактивного ускорения принималась равной 0.0014 (1 мм/с²). Численное интегрирование велось на интервале от 0 до 24 (6.78 суток, или 3.83 оборота Ио вокруг Юпитера). Кривые ζ_i соответствуют расчету по формуле (8), а ξ_i - численному интегрированию. Кривые ζ_1 , ξ_1 соответствуют $\omega_0=0$ ($c=1$), то есть траектории типа A_2 , а кривые ζ_2 , ξ_2 - $\omega_0=15.2^\circ$ ($c=2$), то есть траектории типа A_1 . Видно, что на рассматриваемом интервале времени оскулирующая орбита КА успевает проэволюционировать до вырождения в отрезок прямой. Точная траектория, полученная в результате численного интегрирования колеблется в окрестности найденного осредненного решения, причем амплитуда этих колебаний растет по мере приближения КА к границе сферы Хилла.

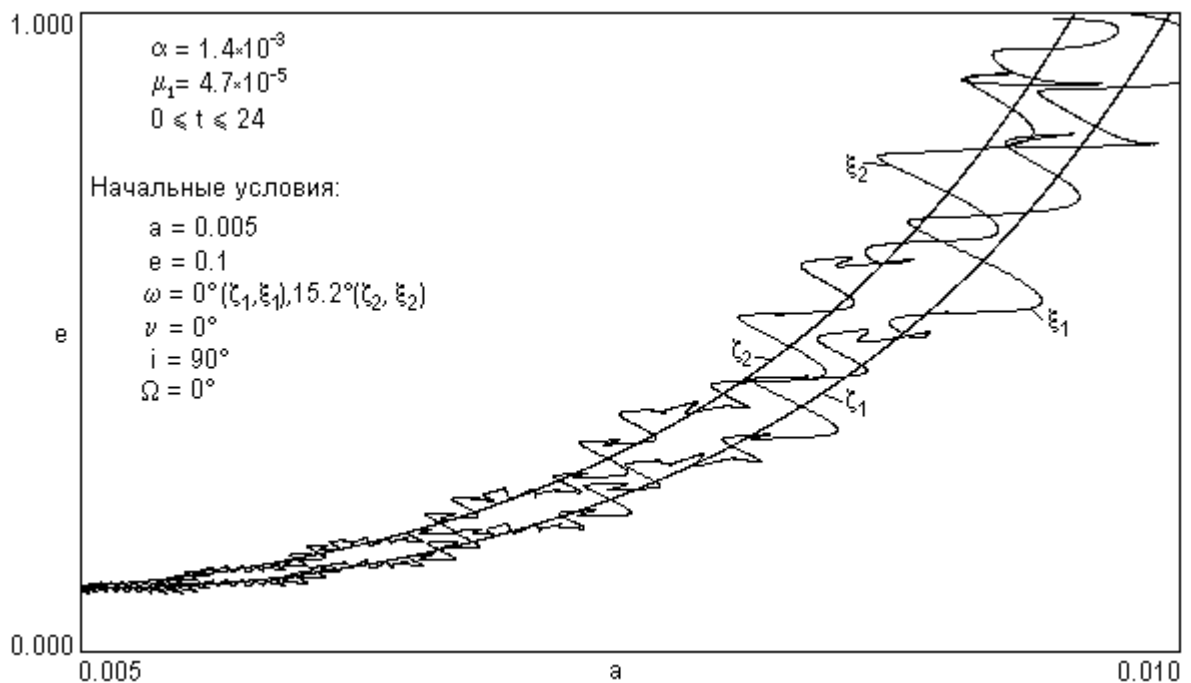


Рис. 2.5. Сравнение решения двукратно осредненной задачи (8) с результатами численного интегрирования точных уравнений движения КА.

Численное интегрирование проводилось методом Эверхарта 15-го порядка [82], причем глобальная относительная ошибка метода оценивалась интегрированием в обратном направлении по времени после завершения прямого интегрирования и не превышала 10^{-12} (интегрировались уравнения движения КА в безразмерных переменных в неподвижной прямоугольной иоцентрической системе координат). Заметим, что несмотря на отмеченную неустойчивость рассматриваемых траекторий по наклонению, их проекции на плоскость (a, e) , например для случая $i_0=88^\circ$ мало отличаются от соответствующей кривой для полярной орбиты вплоть до вырождения движения в прямолинейное.

Численное моделирование динамической системы, описываемой уравнениями (5), (6) при начальных условиях, для которых отсутствуют ее точные решения, позволило выявить ряд дополнительных интересных особенностей эволюции движения КА. Так, на рис.2.6-2.8 представлены результаты численного интегрирования уравнений (5), (6) со следующими начальными условиями: $x_0=0.1$, $e_0=0.1$, $\omega_0=0$, $i_0=74.771^\circ$, $\Omega_0=0$. Из рис.2.6 видно, что эксцентриситет в процессе раскрутки испытывает значительные колебания, достигая максимального значения порядка 0.9 и падая до нуля, причем высота локальных максимумов эксцентриситета снижается с ростом большой полуоси. Колебания наклонения (рис.2.7) носят аналогичный характер, максимальное его значение равно начальному, а минимальное - около 40° , то есть наклонение не опускается ниже критического значения 39.23° , найденного из анализа решений линеаризованных по эксцентриситету уравнений (12), (13). Из рис.2.7 видно, что аргумент перигея совершает колебания практически с постоянной амплитудой, а линия узлов орбиты прецессирует с переменной угловой скоростью, увеличивающейся в

области локального максимума эксцентриситета и соответствующего ему минимума наклона орбиты.

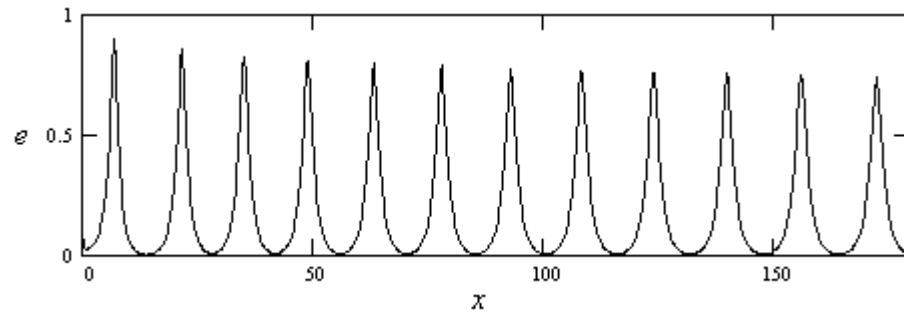


Рис. 2.6. Зависимость эксцентриситета от x для модельной задачи

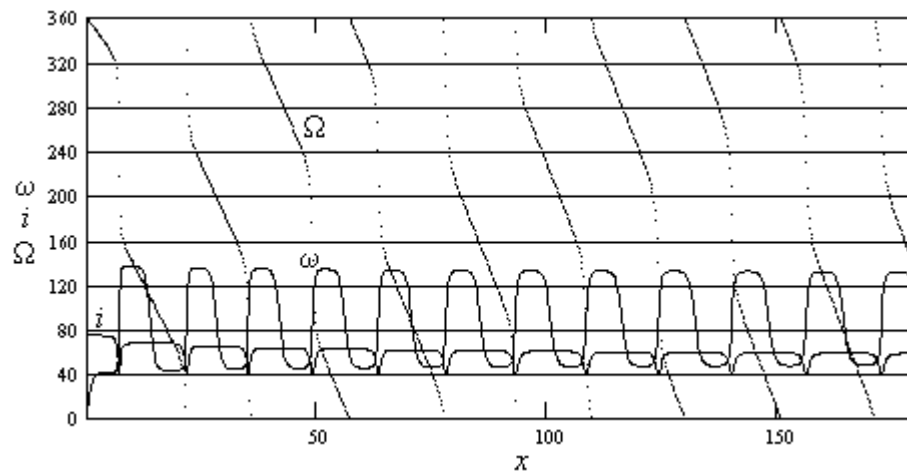


Рис. 2.7. Зависимость аргумента перигея, наклона и долготы восходящего узла орбиты КА от x для модельной задачи

Определенный интерес представляют приведенные на рис.2.8 проекции фазовой траектории для рассматриваемой модельной задачи. Из рис.2.8 видно, что проекция фазовой траектории на плоскость (i, e) (рис.2.8а) стремится к некоторой предельной дуге, а проекции на плоскость (ω, e) (рис.2.8б) и (i, ω) (рис.2.8в) - к некоторым предельным циклам. На рис.2.8г показано поведение интегральных кривых в переменных $(\cos^2 i, e^2)$, причем пунктирной линией обозначена соответствующая кривая для случая пассивного движения КА (классическая задача Хилла, интеграл $(1 - e^2)\cos^2 i = c_1$).

На рис.2.9 и рис.2.10 представлены результаты сравнения решений системы уравнений (5), (6) и линеаризованной системы (12), (13). На

рис.2.9а и 2.10а показаны зависимости эксцентриситета орбиты КА от x (сплошная линия - решения системы (5), (6), крестики - решения системы (12), (13)), а на рис.2.9б и 2.10б - разность между решениями системы (5), (6) и решениями линеаризованной по эксцентриситету системы. Рис.2.9 соответствует задаче Коши со следующими начальными условиями: $x_0=0.1$, $e_0=0.5$, $\omega_0=0$, $i_0=25^\circ$, $\Omega_0=0$, а начальные условия для задачи, решение которой представлено на рис.2.10 отличаюся начальным значением наклона: $i_0=60^\circ$.

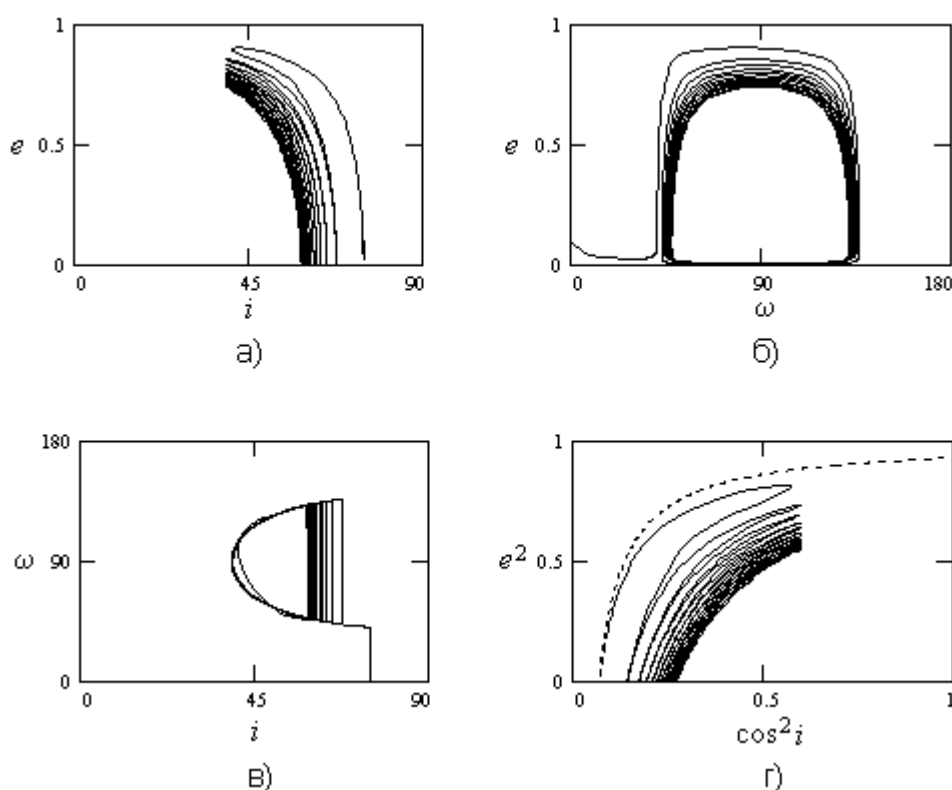


Рис. 2.2.8. Проекция фазовой траектории для модельной задачи

Большое начальное значение эксцентриситета было выбрано намеренно, чтобы продемонстрировать приемлемость использования линеаризованной модели (12), (13) и в этом случае. Из графиков видно, что при наклоне, большем критического (рис.2.10), ошибка линеаризации нарастает существенно быстрее, чем для умеренных наклонов.

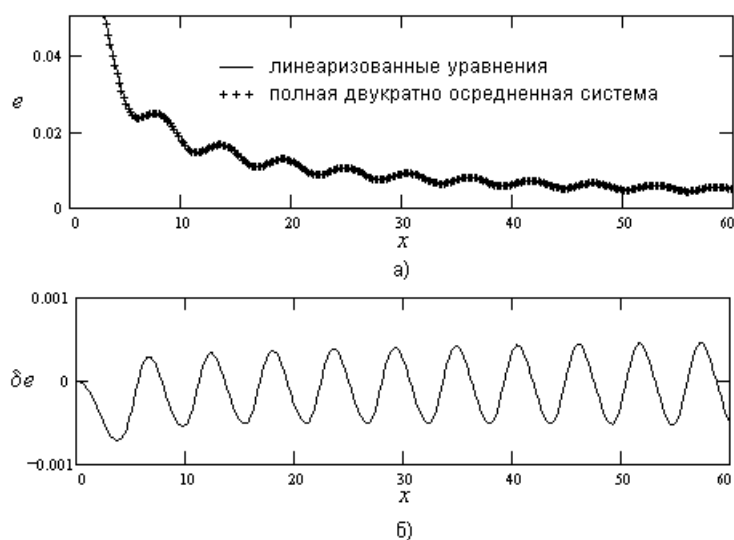


Рис. 2.2.9. Сравнение результатов численного моделирования систем (5) и (12), (13) при наклонении, меньшем критического.

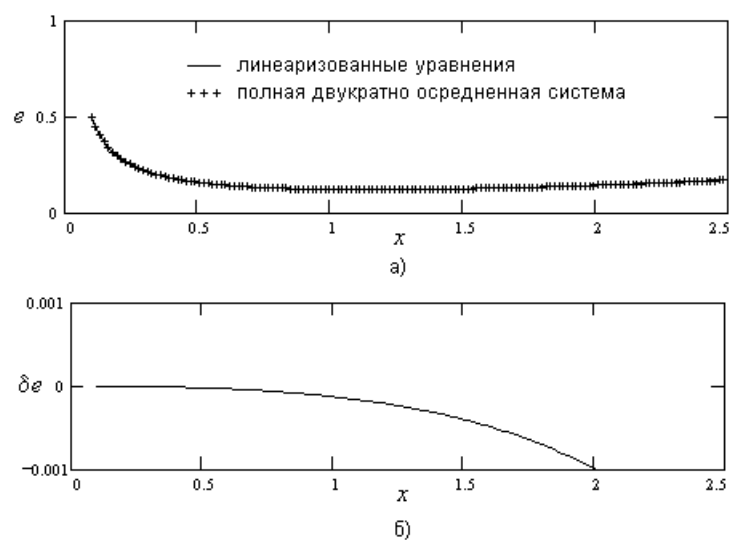


Рис. 2.2.10. Сравнение результатов численного моделирования систем (5) и (12), (13) при наклонении, большем критического.

3. АНАЛИЗ ПРОЕКТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЯДЕРНОЙ ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ УСТАНОВКОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЮПИТЕРА

В третьей главе приводится пример анализа конкретного проекта КА с использованием представленных в работе методов.

Рассматривается возможность выведения КА на орбиту искусственного спутника Юпитера. Предполагается, что РН Протон выводит на круговую околоземную орбиту высотой 200 км с наклоном 51.6° полезную нагрузку массой $m_{00}=21030$ кг [44]. Эта полезная нагрузка состоит из разгонного блока с двигательной установкой большой тяги и КА с ядерной электроракетной установкой (ЯЭРДУ) на основе ядерной энергоустановки (ЯЭУ) Топаз-25 [74, 90] и западноевропейских ионных ракетных двигателей ESA-XX [90].

Такая конфигурация КА рассматривалась в работе [90] при анализе возможности реализации проекта универсального космического аппарата для исследования Солнечной системы. В качестве основных задач, решаемых с помощью такого универсального КА, в [90] рассматривались задачи возврата образцов грунта с астероида главного астероидного пояса Фортуна (№ 19 по каталогу) и выведения КА на орбиты искусственных спутников Меркурия и Плутона. Предполагалось, что модификации универсального КА могут быть использованы и для изучения планет-гигантов, их естественных спутников и трансплутоновых объектов.

При проведении предварительного проектно-баллистического анализа всех перечисленных задач, в [90] существенным образом были использованы методические разработки, представленные в первой части настоящей работы, и разработанное на основе этих методов программное обеспечение.

Третья глава настоящей работы представляет собой пример проведения предварительного проектно-баллистического анализа проекта межпланетного КА с использованием представленных в работе новых методов. Рассматриваются возможности применения универсального КА из [90] и его модификации для выведения полезной нагрузки на орбиту вокруг Юпитера и его естественного спутника Каллисто.

3.1. Комбинированная схема перелета с использованием разгонного блока с двигательной установкой большой тяги для выведения на гелиоцентрическую орбиту

При использовании комбинированной схемы перелета предполагается, что первоначальный импульс скорости КА сообщается с помощью разгонного блока с двигательной установкой большой тяги (в данном варианте рассматривается разгонный блок Д, [44]), а дальнейший перелет обеспечивается ЯЭРДУ. Для того, чтобы избежать участка спиральной раскрутки КА вокруг Земли, блок Д должен сообщить КА некоторый гиперболический избыток скорости, величина которого является оптимизируемым параметром.

Для расчетов были приняты следующие основные параметры разгонного блока и КА [90]:

- конечная масса разгонного блока, включая остатки незабора, гарантийный запас топлива и переходник (адаптер) между разгонным блоком и КА - 1800 кг;
- максимальная масса заправляемого в разгонный блок топлива - 14800 кг;
- скорость истечения двигательной установки разгонного блока - 3541 м/с;
- гравитационные потери на активном участке разгонного блока - 2.5%;

- электрическая мощность ЯЭУ, используемая для обеспечения работы электроракетной двигательной установки (ЭРДУ) - 30 кВт;
- ресурс работы ЯЭУ - 7 лет;
- масса ЯЭУ - 2500 кг;
- скорость истечения ионных ракетных двигателей ESA-XX может изменяться от 40000 до 55000 м/с;
- тяговый к.п.д. ЭРДУ равен 0.7;
- к.п.д. вторичного преобразователя энергии в ЭРДУ равен 0.9;
- ресурс работы ЭРДУ - 30000 час;
- масса ЭРДУ в рассматриваемом приближении считается постоянной и равной 500 кг;
- в качестве рабочего тела ЭРДУ используется ксенон; относительная масса системы его хранения и подачи равна 0.2;
- масса конструкции и служебных систем КА (включая системы ориентации и стабилизации) принимается равной 500 кг.

Масса доставляемой к Юпитеру полезной нагрузки растет при увеличении продолжительности T гелиоцентрического участка перелета. Продолжительность перелета, в свою очередь, ограничена ресурсом ЯЭРДУ и других систем КА. При проведении расчетов принималось, что максимальная продолжительность гелиоцентрического участка не должна превышать $T_{\max}=1850$ суток (чуть более 5 лет). Так как ставилась задача максимизации массы полезной нагрузки, то $T=T_{\max}=1850$ суток.

На первом этапе анализировались ИР-оптимальные гелиоцентрические траектории сопровождения Юпитера. Оптимальная экстремаль определялась с помощью сравнения значений функционала (1.1.2) на различных экстремальных решениях, полученных с помощью метода продолжения по гравитационному параметру (см. п.1.5). Для $T=1850$ суток

оказалось, что оптимальным является “1.5-витковый” перелет, то есть перелет с угловой дальностью, находящейся в пределах от 360° до 720° .

Минимум функционала (1.1.2) соответствует минимуму затрат рабочего тела ЭРДУ на осуществление перелета. В случае, когда гиперболический избыток скорости V_∞ КА при его выходе из сферы действия Земли не равен нулю, максимум этого функционала не соответствует, вообще говоря, максимуму полезной нагрузки, так как масса КА в начале гелиоцентрического участка зависит от величины V_∞ . Поэтому, для оценки максимальной массы полезной нагрузки, доставляемой в окрестность Юпитера, необходимо получить ИР-оптимальные решения для серии значений гиперболического избытка скорости КА и выбрать оптимальное значение V_∞ , соответствующее максимуму массы полезной нагрузки.

Для определения последовательности ИР-оптимальных траекторий для различных значений V_∞ , использовались методы, представленные в пп. 1.1 и 1.4. Определенная таким способом зависимость массы полезного груза от величины гиперболического избытка скорости представлена на рис.3.1.1 для даты старта 10.12.2001. Оптимальным оказался $V_\infty=2000$ м/с, для которого оценка массы полезной нагрузки оказалась равной 773.5 кг.

Оптимизация даты старта проводилась аналогично оптимизации V_∞ . Оптимальной оказалась дата 15.10.2001. Ей соответствует полезная нагрузка 843.0 кг. Смещение даты старта более чем на два месяца приводит к уменьшению массы полезной нагрузки менее чем на 100 кг (рис.3.1.2).

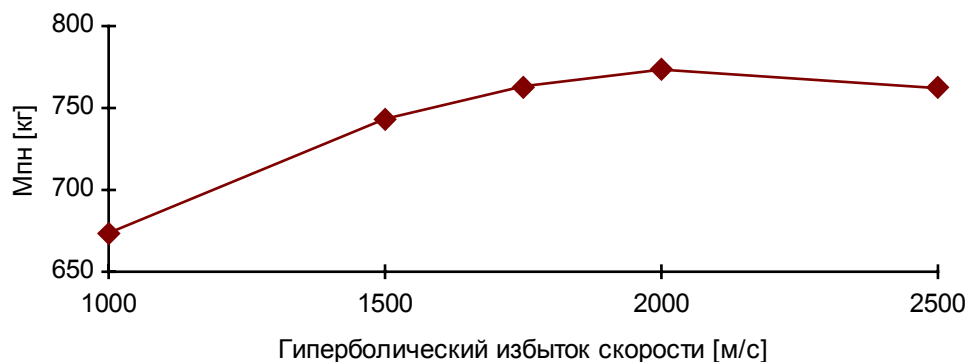


Рис. 3.1.1. Зависимость массы полезной нагрузки от гиперболического избытка скорости при выходе из сферы действия Земли. $T=1850$ сут, $t_0=10.12.2001$

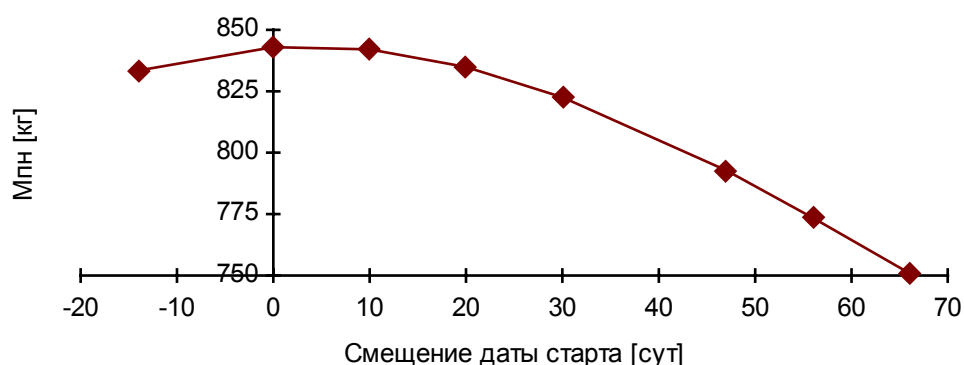


Рис. 3.1.2. Зависимость массы полезной нагрузки от смещения даты старта относительно оптимального значения 15.10.2001. $T=1850$ сут, $V_\infty=2000$ м/с. В табл.3.1.1 приведены некоторые результаты расчета серии ИР-оптимальных траекторий. Варьировались дата старта t_0 , время перелета T и гиперболический избыток скорости V_∞ . В таблице 3.1.1 представлены значения массы КА в начале гелиоцентрического участка траектории m_0 , требуемая масса рабочего тела (ксенона) m_T и масса полезной нагрузки $m_{пн}$, доставляемой к границе сферы действия Юпитера с нулевой относительной скоростью. Из этой таблицы, в частности, следует, что уменьшение времени перелета на 50 суток приводит к потере 78 кг в массе полезной нагрузки, а увеличение времени перелета на 50 суток - к увеличению массы полезной нагрузки на 68.8 кг.

Таблица 3.1.1.

Серия ИР-оптимальных решений задачи сопровождения Юпитера

t_0	T [сут]	V_∞ [м/с]	m_0 [кг]	m_T [кг]	m_{nn} [кг]
Продолжение по V_∞					
10.12.2001	1850	1000	6321.2	1789.6	673.7
10.12.2001	1850	1500	6189.2	1621.4	743.4
10.12.2001	1850	1750	6104.8	1534.6	763.3
10.12.2001	1850	2000	6009.0	1446.2	773.5
10.12.2001	1850	2500	5785.0	1269.1	762.1
Продолжение по t_0					
20.12.2001	1850	2000	6009.0	1465.0	751.0
01.12.2001	1850	2000	6009.0	1430.1	792.8
14.11.2001	1850	2000	6009.0	1405.4	822.6
04.11.2001	1850	2000	6009.0	1395.0	834.9
25.10.2001	1850	2000	6009.0	1388.8	842.4
15.10.2001	1850	2000	6009.0	1388.4	843.0
01.10.2001	1850	2000	6009.0	1396.2	833.5
Продолжение по V_∞					
15.10.2001	1850	1600	6156.9	1521.7	830.9
15.10.2001	1850	1800	6086.6	1454.8	840.7
15.10.2001	1850	2200	5924.4	1321.8	838.2
Продолжение по T					
15.10.2001	1800	2000	6009.0	1453.3	765.0
15.10.2001	1900	2000	6009.0	1331.0	911.8

На рис.3.1.3 представлена ИР-оптимальная траектория с близким к оптимальному значению V_∞ и с оптимальной датой старта. Величина и направление штрихов вдоль траектории на этом рисунке соответствует величине и направлению реактивного ускорения в соответствующей точке траектории. Продолжительность перелета КА между двумя соседними точками, отмеченными штрихами, равна 18.5 суток. На рис. 3.1.4 представлена соответствующая этой траектории программа изменения величины реактивного ускорения.

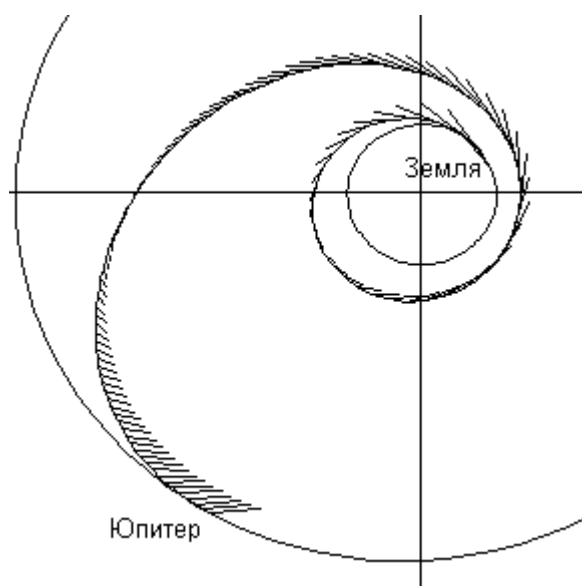


Рис. 3.1.3. ИР-оптимальная траектория перелета к Юпитеру продолжительностью 1850 суток с $V_{\infty}=1800$ м/с и оптимальной датой старта (15.10.2001).

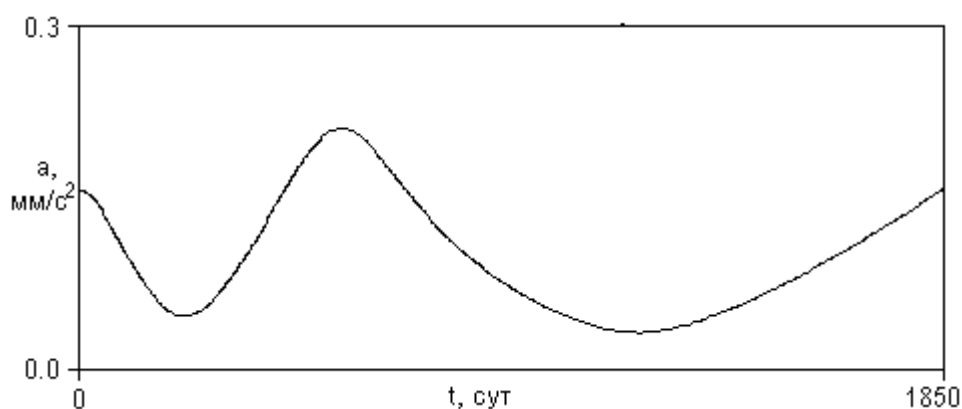


Рис. 3.1.4. Зависимость ускорения от времени для ИР-оптимальной траектории, представленной на рис. 3.1.3.

Продолжим ИР-траекторию, представленную на последних двух рисунках в ПСИ-траекторию с помощью метода из п.1.7. Как отмечалось выше, в составе ЭРДУ предполагается использовать ионные двигатели ESA-XX. При заданной электрической мощности ЯЭУ и скорости истечения (см. выше), тяга ЭРДУ на основе этих двигателей равна 0.9554 Н.

Решение задачи продолжения привело к следующим результатам, характеризующим гелиоцентрический участок ПСИ-оптимальной траектории КА:

- масса КА в начале геоцентрического участка траектории при гиперболическом избытке скорости 1800 м/с равна 6086.6 кг;
- траектория состоит из трех активных участков продолжительностью 154.3, 513.6 и 233.8 суток, разделенных двумя пассивными участками продолжительностью 208.5 и 739.8 суток;
- масса рабочего тела (ксенона), требуемого для реализации гелиоцентрического участка траектории, равна 1665.7 кг;
- к границе сферы действия Юпитера с нулевым йовиоцентрическим гиперболическим избытком скорости доставляется полезная нагрузка массой 587.8 кг; общая масса КА в этот момент равна 4420.9 кг.

Следующей задачей является оценка возможности перевода КА с пролетной (параболической) орбиты на заданную спутниковую йовиоцентрическую орбиту. Возможны различные способы достижения этой цели. Существует принципиальная возможность формирования таких орбит с помощью многократных гравитационных маневров у галилеевых спутников Юпитера, при этом затраты рабочего тела будут определяться только необходимостью коррекции траектории. При такой схеме полета массу полезной нагрузки на орбите искусственного спутника Юпитера можно считать примерно равной массе полезной нагрузки, доставляемой к границе сферы действия Юпитера.

Рассмотрим альтернативную, более универсальную схему полета, включающую участок спиральной скрутки КА в сфере действия Юпитера до достижения заданной йовиоцентрической орбиты. На гелиоцентрическом участке траектории затрачивается более полутора тонн рабочего тела. Соответствующая масса системы хранения и подачи при принятых допущениях равна 333.1 кг. Поэтому представляется целесообразным сбросить часть топливного отсека, предназначенного для

хранения и подачи уже израсходованного ксенона, перед началом маневрирования в мощном гравитационном поле Юпитера. Масса КА в начале маневра скрутки, таким образом, равна $4420.9 - 333.1 = 4087.8$ кг. Предположим, что реактивная тяга ЭРДУ в процессе скрутки направлена трансверсально.

Задачу скрутки КА с малой трансверсальной тягой в центральном гравитационном поле с целью перевода его с параболической орбиты на заданную круговую орбиту, можно рассматривать как обращение задачи раскрутки с круговой орбиты до набора параболической скорости. Формально, это обращение достигается заменой независимой переменной - времени - в дифференциальных уравнениях движения: $t = -t$. Следует, однако, отметить, что при конечном значении скорости истечения, данная задача является краевой, так как масса аппарата задана в начале процесса скрутки, а интегрирование уравнений движения ведется с конечной точки этого участка (точнее, с произвольной точки конечной круговой орбиты). Неизвестным параметром краевой задачи при этом является масса КА на конечной круговой орбите.

Пусть требуется перевести КА на орбиту, совпадающую с орбитой внешнего галилеева спутника Юпитера - Каллисто. Орбита этого спутника является практически круговой (большая полуось $a = 1880000$ км). В результате решения однопараметрической задачи скрутки оказалось, что требуемые для ее реализации запасы рабочего тела равны 550.4 кг, то есть почти равны доставляемой к границе сферы действия Юпитера массе полезной нагрузки. Точнее, на круговую ювиоцентрическую орбиту с $a = 1880000$ км доставляется полезная нагрузка $587.8 - 550.4 = 37.4$ кг.

Таким образом орбита внешнего галилеева спутника Юпитера является предельно возможной "глубиной" погружения КА в сферу действия Юпитера при рассмотренной схеме перелета и заданных основных

проектных параметрах. Более тщательная увязка проекта КА, оптимизация режима работы разгонного блока Д для снижения гравитационных потерь и оптимизация участка скрутки вокруг Юпитера могут привести к некоторому увеличению массы полезной нагрузки. Однако, например, для решения задачи исследования галилеевых спутников Юпитера со спутниковых орбит вокруг них или задачи формирования с помощью ЭРДУ более близкой к Юпитеру спутниковой орбиты, представляется целесообразным изменить схему полета, включив в нее участок спиральной раскрутки вокруг Земли.

3.2. Схема перелета с участком спиральной раскрутки вокруг Земли

Как и в предыдущем разделе, предполагается, что РН Протон выводит на круговую околоземную орбиту высотой 200 км с наклоном 51.6° полезную нагрузку массой $m_{00}=21030$ кг. Рассмотрим возможность использования ЯЭРДУ на базе ЯЭУ Топаз-25 и ЭРД ESA-XX при включении в схему перелета участка спиральной раскрутки КА вокруг Земли до набора параболической скорости.

Безопасной высотой запуска ЯЭУ считается высота 800 км [74, 90]. Выведение КА с начальной круговой орбиты высотой $h_0=200$ км на промежуточную круговую орбиту высотой $h_1=800$ км осуществляется с помощью разгонного блока АДУ-1Ф (конечная масса $m_{\text{крб}}=550$ кг, скорость истечения $w_{\text{крб}}=3187$ кг). Перелет на промежуточную орбиту осуществляется по гомановской траектории. Суммарная характеристическая скорость этого двухимпульсного перелета равна 332.8 м/с. Полагая гравитационные потери равными 2.5%, получим требуемую величину характеристической скорости $\Delta V_\Sigma=341.1$ м/с. Относительная масса топлива, затрачиваемая на рассматриваемый маневр, равна $\mu_{\text{ткрб}}=1-\exp(-\Delta V_\Sigma/w_{\text{крб}})=0.1015026$. Таким образом, для данной начальной массы,

требуемая заправка АДУ-1Ф равна $m_{\text{тхрб}} = \mu_{\text{тхрб}} \cdot m_{00} = 2134.6$ кг. Пусть АДУ-1Ф соединяется с КА с помощью адаптера массой $m_a = 45.4$ кг. Тогда на промежуточную орбиту высотой 800 км доставляется полезная нагрузка массой

$$m_0 = m_{00} - (m_{\text{кхрб}} + m_{\text{тхрб}}) - m_a = 18300 \text{ кг.}$$

Итак, масса КА в начале участка спиральной раскрутки вокруг Земли на круговой промежуточной орбите высотой $h_1 = 800$ км равна $m_0 = 18300$ кг. Предполагается, что на участке раскрутки двигательная установка работает непрерывно, причем тяга направлена по трансверсали. Для расчета этого участка численно интегрировались уравнения движения КА в центральном гравитационном поле с трансверсально направленной постоянной по величине тягой.

Как и ранее предположим, что скорость истечения ЯЭРДУ $w = 44500$ м/с. Известно [74, 90], что мощность ЯЭУ может быть форсирована в течение 1 года до 60 кВт, при этом общий ее ресурс равен 7 годам при электрической мощности в номинальном режиме 30 кВт. Пусть на участке спиральной раскрутки ЯЭУ работает в форсированном режиме. Тогда, при $N = 60$ кВт и $w = 44500$ м/с, двигательная установка на основе ЭРД ESA-XX обеспечивает тягу $P = 1.9108$ Н [90]. Это соответствует начальному ускорению $a_0 = 0.1044$ мм/с² и массовому расходу 0.04294 г/с. Безразмерное начальное реактивное ускорение и массовый расход, отнесенные к промежуточной орбите и к начальной массе КА, равны $1.347 \cdot 10^{-5}$ и $2.257 \cdot 10^{-6}$ соответственно.

Требуемое время набора параболической скорости, определенное в результате численного интегрирования уравнений движения КА, равно $T_{\text{п}} = 727.5$ суток, что почти в два раза превышает допустимую продолжительность работы ЯЭУ в форсажном режиме. Уменьшить $T_{\text{п}}$ при фиксированной мощности N можно уменьшением скорости истечения w . Это

приводит, разумеется, к увеличению массы требуемого рабочего тела. Кроме того, к.п.д. ионных двигателей типа ESA-XX существенно снижается при $w < 35000$ м/с.

Поэтому, рассмотрим возможность использования спаренной ЯЭУ, состоящей из двух одновременно работающих идентичных ЯЭУ Топаз-25. В этом случае, электрическая мощность ЯЭУ в форсированном режиме равна $2 \cdot 60 = 120$ кВт, что при $w = 44500$ м/с соответствует тяге 3.8216 Н, начальному ускорению 0.2088 мм/с² и массовому расходу 0.08588 г/с. При таких параметрах время раскрутки равно 360.6 суток, приращение характеристической скорости - 7034 м/с, расход рабочего тела - 2675.7 кг. В момент набора параболической скорости, геоцентрическое удаление КА равно 1090500 км. Таким образом, масса КА в начале гелиоцентрического участка траектории равна

$$m_{01} = 18300 - 2675.7 = 15624.3 \text{ кг.}$$

Пусть продолжительность перелета по-прежнему равна 1850 суток (при этом, с учетом участка геоцентрической раскрутки, ресурса спаренной ЯЭУ хватает еще по меньшей мере на год функционирования в окрестности Юпитера с мощностью $2 \cdot 30 = 60$ кВт или на 2 года с мощностью 30 кВт). Исходные данные для расчета гелиоцентрического участка перелета от Земли к Юпитеру следующие:

$$T = 1850 \text{ сут, } V_{\infty} = 0 \text{ м/с, } m_{01} = 15624.3 \text{ кг, } P = 1.9108 \text{ Н, } w = 45500 \text{ м/с}$$

(тяга рассчитана для электрической мощности 60 кВт).

В табл.3.2.1 приведены результаты расчета ИР-оптимальных траекторий для разных дат начала гелиоцентрического участка траектории t_0 во второй половине 2001 года ($\Phi = \int_0^T a^2 dt$, $a_{01}^{\text{нр}}$ - начальное реактивное ускорение).

Таблица 3.2.1.

ИР-оптимальные траектории сопровождения Юпитера.

 $T=1850$ сут, $V_{\infty}=0$ м/с.

t_0	Φ [м ² /с ³]	$a_{01}^{\text{ИР}}$ [мм/с ²]
15.10.2001	2.637707	0.22231
01.10.2001	2.608107	0.21365
01.09.2001	2.569610	0.18423
20.08.2001	2.565766	0.16861
01.08.2001	2.574439	0.14060

Из табл.3.2.1 видно, что оптимальной является дата 20.08.2001. Располагаемое начальное ускорение $a_{01}=P/m_{01}=0.12230$ мм/с² меньше, чем требуемое начальное ускорение $a_{01}^{\text{ИР}}$ на ИР-оптимальных траекториях в рассматриваемом диапазоне дат старта (см. последний столбец табл.3.2.1). Малый располагаемый уровень реактивного ускорения может привести к невозможности реализации траектории перелета с двигательной установкой постоянной скорости истечения за данное фиксированное время. Действительно, попытка продолжения ИР-оптимального решения с $t_0=20.08.2001$ в ПСИ-оптимальное с приведенными выше параметрами окончилась неудачно именно по этой причине - из-за несуществования искомого решения. Признаком несуществования ПСИ-оптимального решения является исчезновение пассивных участков в процессе продолжения ИР- решения в ПСИ-решение.

Таким образом, для обеспечения возможности реализации траектории перелета к Юпитеру требуется увеличить либо продолжительность перелета, либо величину располагаемого реактивного ускорения.

Рассмотрим второй вариант. Для увеличения тяговооруженности следует либо увеличить электрическую мощность (что для данного варианта ЯЭУ уже невозможно), либо снизить скорость истечения.

Пусть скорость истечения $w=40000$ м/с. Геоцентрический участок траектории КА, рассчитанный для другой скорости истечения, необходимо

пересчитать. Электрическая мощность $2 \cdot 60 = 120$ кВт обеспечивает тягу 4.3470 Н при $w = 40000$ м/с. Это соответствует начальному реактивному ускорению на промежуточной орбите $a_0 = 0.23751$ мм/с² и массовому расходу 0.10868 г/с. Параболическая скорость достигается за $T = 313.7$ суток, при этом затраты характеристической скорости и рабочего тела равны 7018 м/с и $m_T = 2945.4$ кг соответственно, причем параболическая скорость достигается на геоцентрическом удалении 1013800 км.

Масса КА в начале гелиоцентрического участка $m_{01} = 15624.3$ кг. Электрическая мощность ЯЭУ на гелиоцентрическом участке равна $2 \cdot 30 = 60$ кВт, что соответствует тяге $P = 2.1735$ Н и располагаемому начальному реактивному ускорению $a_{01} = P/m_{01} = 0.1416$ мм/с². Продолжение ИР-оптимальной траектории ($t_0 = 20.08.2001$, см. табл.3.2.1) в ПСИ-оптимальную привело к следующим результатам:

1. Гелиоцентрический участок траектории содержит три активных участка. Их продолжительность равна 246.4 , 652.5 и 223.2 суток. Активные участки траектории разделены двумя пассивными участками продолжительностью 40.7 и 687.2 суток (см. рис.3.2.1). Общее моторное время составляет 1122.1 суток, или 26930.6 часов. Оптимальные углы ориентации тяги представлены на рис.3.2.2.

Границы сферы действия Юпитера с нулевой относительной скоростью достигает КА массой $m_{k1} = 9992.4$ кг. Расход рабочего тела на гелиоцентрическом участке составляет $m_{T1} = 5362.2$ кг. Суммарный расход рабочего тела на геоцентрическом и гелиоцентрическом участках траектории равен $m_{T\Sigma} = 8307.6$ кг.

Следующим участком перелета является выведение КА на орбиту искусственного спутника Юпитера. Эту задачу можно решить с помощью гравитационных маневров в окрестности галилеевых спутников Юпитера, но мы ограничимся рассмотрением возможности скрутки КА с ЯЭРДУ с

помощью постоянной по величине трансверсально направленной реактивной тяги.

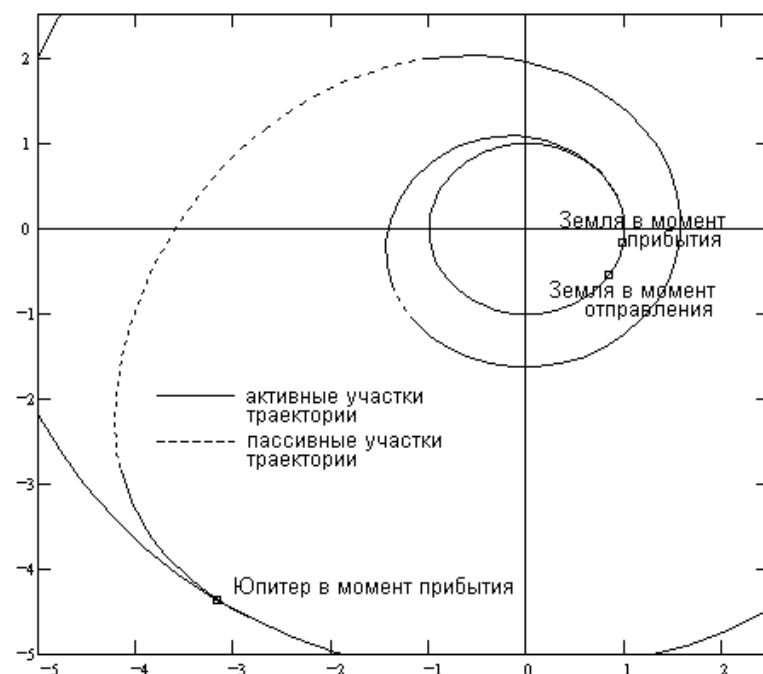
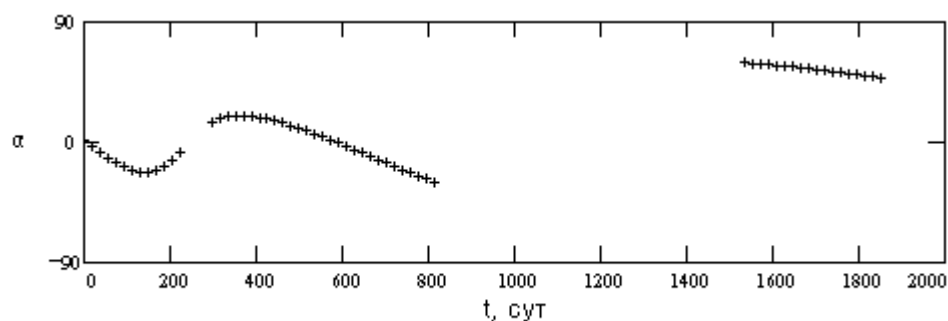
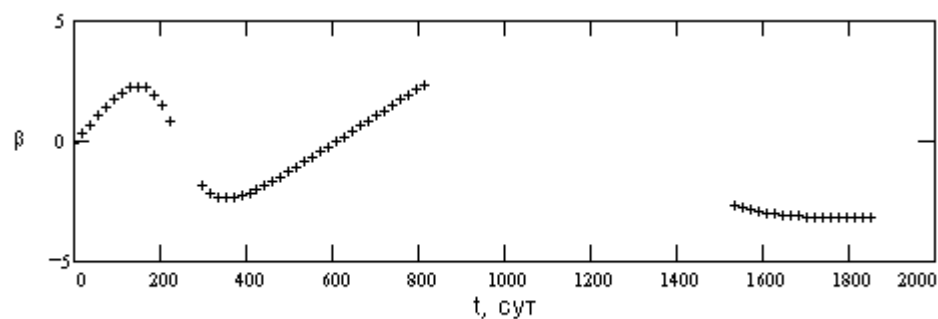


Рис. 3.2.1. ПСИ-оптимальная траектория перелета к Юпитеру.



а) угол между направлением тяги и трансверсалью



б) угол между направлением тяги и плоскостью эклиптики

Рис. 3.2.2. Углы ориентации тяги на ПСИ-оптимальной траектории перелета к Юпитеру

Пусть, как и в предыдущем пункте, требуется перевести КА на орбиту, совпадающую с орбитой внешнего галилеева спутника Юпитера - Каллисто.

Так как затраты рабочего тела на геоцентрическом и гелиоцентрическом участках перелета являются значительными, то велика и масса системы хранения этого топлива. При относительной массе топливного отсека $a_{то}=0.2$, она составляет $\Delta m_1=1661.5$ кг. Представляется целесообразным сбросить эту массу перед началом маневрирования КА в мощном гравитационном поле Юпитера.

Итак, в начале йовицентрического участка движения КА, его масса составляет

$$m_{02}=m_{k1}-\Delta m_1=9992.4-1661.5=8330.9 \text{ кг.}$$

Тяга двигательной установки и скорость истечения те же, что и на гелиоцентрическом участке траектории, а начальное реактивное ускорение $a_{02}=0.2609 \text{ мм/с}^2$. В результате решения однопараметрической краевой задачи скрутки оказалось, что на орбиту, совпадающую с орбитой Каллисто, выводится КА массой $m_{k2}=7101.3$ кг за время $T_2=261.9$ суток. При этом затраты характеристической скорости и рабочего тела равны 8209 м/с и $m_{т2}=1229.6$ кг, а торможение должно начинаться на удалении 18709000 км от Юпитера.

Пусть требуется вывести КА на круговую орбиту вокруг Каллисто высотой 3420 км (гравитационный параметр Каллисто равен $7172 \text{ км}^3/\text{с}^2$, радиус - 2420 км). Для расчета этого участка необходимо применить ту же процедуру, что и для расчета скрутки у Юпитера. Начальная масса КА при скрутке у Каллисто равна $m_{03}=m_{k2}=7101.3$ кг, что соответствует реактивному ускорению $a_{03}=0.3061 \text{ мм/с}^2$. Расчет траектории скрутки показывает, что для выведения КА на круговую орбиту вокруг Каллисто требуется затратить $T_3=35.3$ суток и $m_{т3}=165.7$ кг рабочего тела. Масса КА

на конечной орбите вокруг Каллисто равна $m_{k3}=6935.6$ кг. Торможение должно начинаться на удалении 130560 км от Каллисто.

Расход рабочего тела на скрутку вокруг Юпитера и Каллисто составляет $m_{T2}+m_{T3}=1229.6+165.7=1395.3$ кг. При $a_{T0}=0.2$, сухая масса топливного отсека равна 279.1 кг. С учетом массы ЯЭУ (5000 кг), ЭРДУ (500 кг), конструкции и служебных систем КА (500 кг), масса доставляемого на конечную орбиту полезного груза в рассматриваемом варианте равна 656.5 кг. Разумеется, эта цифра является условной и может быть изменена за счет изменения массы ЯЭРДУ, конструкции и служебных систем КА.

ЯЭУ работает в форсированном режиме 313.7 суток (0.859 года) и в номинальном режиме 1419.3 суток (3.886 года). Таким образом, остаток ресурса ЯЭУ позволяет генерировать электрическую мощность 60 кВт в течение 2.255 лет или 30 кВт в течение 4.510 лет для обеспечения функционирования полезной нагрузки.

В табл.3.2.2 приведены некоторые результаты расчета рассмотренного варианта перелета в виде последовательности событий. Для каждого события в таблице приведены интервал времени между предыдущим и данным событиями ΔT_i , требуемые затраты электрической мощности на функционирование ЭРДУ N и масса КА на момент этого события m . Для ряда событий приведено удаление КА от Земли, Юпитера или Каллисто (r_E , r_J и r_C соответственно).

При проведении оценок возможности осуществления маневров в окрестности Каллисто необходимо учитывать сильные возмущения траектории КА, вызванные притяжением Юпитера. Оценить эти возмущения можно с помощью методов, разработанных во второй части работы.

Таблица 3.2.2

Результаты расчета перелета КА с ЯЭРДУ к Юпитеру и Каллисто с участком геоцентрической спиральной раскрутки

Событие	ΔT_i , сут	N кВт	m , кг	r_E , тыс.км	r_J , млн.км	r_C , тыс.км
1. Выведение на начальную орбиту ИСЗ	~0	0	21030.0	6.571		
2. Выведение на промежуточную орбиту ИСЗ	~0	0	18895.4	7.171		
3. Отделение разгонного блока АДУ-1Ф с адаптером	~0	0	18300.0	7.171		
4. Включение ЯЭРДУ в форсажном режиме	~0	120	18300.0	7.171		
5. Набор параболической скорости	313.7	120	15354.6	1014		
6. Перевод ЯЭРДУ в номинальный режим	~0	60	15354.6			
7. Конец первого активного участка. Отключение ЭРДУ	246.4	0	14177.1			
8. Конец первого пассивного участка. Включение ЭРДУ	40.7	60	14177.1			
9. Конец второго активного участка. Отключение ЭРДУ	652.5	0	11059.0			
10. Конец второго пассивного участка. Включение ЭРДУ	687.2	60	11059.0			
11. Конец третьего активного участка. Прибытие к границе сферы действия Юпитера с нулевой относительной скоростью	223.2	0	9992.4			
12. Отделение части топливного отсека	~0	0	8330.9			
13. Начало скрутки вокруг Юпитера	~0	60	8330.9		18.709	
14. Прибытие к границе сферы действия Каллисто с нулевой относительной скоростью	261.9	60	7101.3		1.880	
15. Начало скрутки вокруг Каллисто	~0	60	7101.3			130.5
16. Прибытие на конечную спутниковую орбиту вокруг Каллисто	35.3	60	6935.6			5.840
17. Операции в окрестности Каллисто	≤ 1647	≥ 30				

Рассмотрим, к примеру, раскрутку КА с орбиты высотой 3420 км вокруг Каллисто с постоянным трансверсально направленным реактивным

ускорением (например, для перевода КА от Каллисто к другому естественному спутнику Юпитера). Оценим предельное значение эксцентриситета начальной орбиты, при котором эволюция орбиты КА в процессе раскрутки не приводит к его столкновению с Каллисто.

Как следует из результатов раздела 2.4, если наклонение орбиты КА к плоскости орбиты Каллисто (практически совпадающее с наклонением к плоскости экватора Каллисто) меньше критического ($\sim 39.23^\circ$), то эксцентриситет в процессе раскрутки не увеличивается вплоть до подлета КА к границам сферы Хилла, по крайней мере в случае малого эксцентриситета начальной орбиты. Таким образом, процесс раскрутки с начальной орбиты с наклонением меньшим критического и с малым (порядка 0.1 и менее) эксцентриситетом можно считать безопасным в смысле возможности столкновения КА с Каллисто.

Однако, для решения исследовательских задач, связанных с изучением поверхности Каллисто более приемлимой может оказаться полярная эллиптическая орбита, так как она обеспечивает, во-первых, полный обзор его поверхности, и, во-вторых, более детальное изучение участков поверхности в окрестности подспутниковой точки при прохождении КА перицентральных участков. Оценить максимально допустимый эксцентриситет такой начальной орбиты можно с помощью результатов разделов 2.2, 2.3, 2.5.

Будем предполагать, что раскрутка вокруг Каллисто осуществляется при одном работающем реакторе, причем 5 кВт электрической мощности затрачивается на обеспечение функционирования полезной нагрузки, то есть при $N=25$ кВт. Этой мощности и начальной массе КА 6935.6 кг соответствует начальное реактивное ускорение 0.13 мм/с^2 . Так как относительный расход массы КА при раскрутке КА вокруг Каллисто мал (менее 2.5%), величину реактивного ускорения в процессе раскрутки

можно считать постоянной. Согласно результатам раздела 2.2 оказывается, что максимальный рост эксцентриситета в процессе раскрутки имеет место при аргументе перицентра, совпадающим с устойчивым стационарным значением. Расчет проекций фазовых траекторий на плоскость (e, x) для трех различных значений e приведен на рис.3.2.3. Затененная область соответствует оскулирующей орбите КА с перицентром, находящимся под поверхностью Каллисто (область, ограниченная кривой γ_1 , раздел 2.5). Вблизи кривой γ_2 двукратно осредненные уравнения перестают быть справедливыми, так как КА в этом случае движется в окрестности параболической орбиты (см. раздел 2.5) и столкновение КА с Каллисто становится маловероятным. Поэтому критическим эксцентриситетом начальной полярной орбиты можно считать начальный эксцентриситет, соответствующий фазовой кривой, проекция которой на плоскость (e, x) проходит через точку пересечения кривых γ_1 и γ_2 . Таким критическим эксцентриситетом в рассматриваемом случае будет $e^*=0.13$ (рис.3.2.3). При $e_0 < e^*$ КА успевает набрать параболическую скорость до столкновения с Каллисто, а при $e_0 > e^*$ должен столкнуться с ним в процессе раскрутки. Так при $e_0=0.25$ столкновение происходит при $x=0.01225$ ($a=23000$ км) и $e=0.901$. Этим параметрам соответствует орбита, касающаяся в перицентре поверхности Каллисто и удаленная от него в апоцентре на 43700 км. Стоит отметить, что ближайшая к Каллисто коллинеарная точка либрации системы Каллисто-Юпитер, определяющая радиус сферы Хилла, удалена на 49560 км.

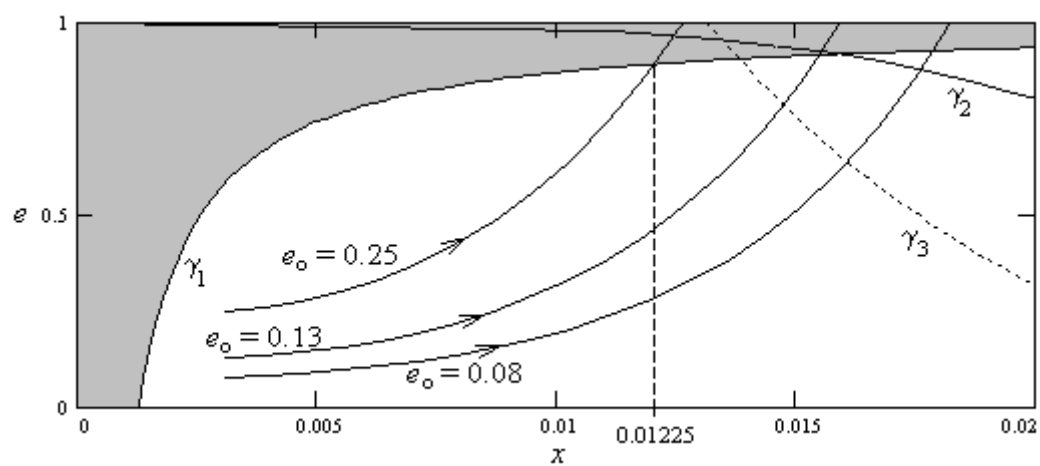


Рис. 3.2.3. Эволюция орбиты КА при его раскрутке вокруг Каллисто.

ВЫВОДЫ

В результате проведенной работы

- 1) разработаны новые численные методы оптимизации траекторий КА с двигательными установками малой тяги типа метода продолжения, позволяющие
 - практически регулярно решать задачи оптимизации траекторий КА с идеально регулируемыми двигательными установками малой тяги;
 - оптимизировать траектории КА с двигательными установками постоянной скорости истечения, используя в качестве начального приближения решение соответствующей оптимизационной задачи для КА с идеально регулируемой двигательной установкой;
 - получать параметрические семейства оптимальных траекторий, зависящие от основных исходных проектно-баллистических параметров КА;
 - решать задачи пролета и сопровождения;
 - решать задачи с фиксированным временем перелета и задачи оптимального быстрогодействия;
 - решать задачи с зависимостью величины реактивной мощности от координат КА и времени.
- 2) проанализирована эволюция орбитального движения КА под совместным влиянием малого трансверсального реактивного ускорения и притяжения возмущающего небесного тела, включая
 - определение частных и приближенных решений эволюционных уравнений;

- классификацию типов траекторий КА для полученных решений.
- 3) разработанные в работе методы позволяют оценивать основные проектные параметры КА с электроракетными двигательными установками и использовались при анализе проектов межпланетных КА, предназначенных для исследования больших планет, их естественных спутников и астероидов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е.П. *Специальные функции в небесной механике*. М.: Наука, 1986.
2. Аксенов Е.П. *Теория движения искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1977.
3. Акуленко Л.Д. *Асимптотические методы оптимального управления*. М.: Наука, 1987.
4. Ахметшин Р.З., Белоглазов С.С., Белоусова Н.С., Глазков А.И., Гущин В.В., Егоров В.А., Ефимов Г.Б. *Оптимизация перелетов к астероидам и кометам космических аппаратов с комбинированием большой и малой тяги*. Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР. 1985. №144.
5. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности. *Космич. исследования*, т.2, № 3, 1964.
6. Белецкий В.В., Егоров В.А. *Разгон космического аппарата в сфере действия планеты*. *Космич. исследования*, т. 2, № 3, 1964.
7. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968
8. Бордовицына Т.В. *Современные численные методы в задачах небесной механики*. М.: Наука, 1984.
9. Брайсон А., Хо Ю Ши. *Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление*. М.: Мир, 1972.
10. Вашковьяк М.А. *Об интегрируемых случаях ограниченной двукратно осредненной задачи трех тел*. *Космич. исследования*, 1984, т.22, № 3, с.327.
11. Вашковьяк М.А. *Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. 1. Качественное исследование*. *Космич. исследования*, 1981, т.19, № 1, с.5.
12. Гребенников Е.А. *Метод усреднения в прикладных задачах*. М.: Наука, 1986.
13. Гришин С.Д., Захаров Ю.А., Оделевский В.К.. *Проектирование космических аппаратов с двигателями малой тяги*. М.: Машиностроение, 1990.
14. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. *Механика космического полета с малой тягой*. М.: Наука, 1966.
15. Джакалья Г. *Методы теории возмущений для нелинейных систем*. М.: Наука, 1979.
16. Дубошин Г.Н. (ред.). *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. М.: Наука, 1976.

17. Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы*. М.: Наука, 1978.
18. Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. М.: Наука, 1975.
19. Егоров В.А. *Пространственная задача достижения Луны*. М.: Наука, 1965.
20. Егоров В.А., Гусев Л.И. *Динамика перелетов между Землей и Луной*. М.: Наука, 1980.
21. Ефимов Г.Б. *Оптимальный разгон в центральном поле до гиперболических скоростей*. Космич. исследования, т. 7, № 1, 1970.
22. Ефимов Г.Б., Константинов М.С., Петухов В.Г., Федотов Г.Г. *Исследование возможности полета к Плутону космического аппарата с солнечной электроракетной двигательной установкой*. Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша РАН, N 25, 1994.
23. Захаров Ю.А. *Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров*. М.: Машиностроение, 1984.
24. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. *Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги*. М.: Наука, 1976.
25. Коган А.Ю. *Далекие спутниковые орбиты в ограниченной круговой задаче трех тел*. Космич. исследования, т.26, № 6, 1988, с. 813-818.
26. Коган А.Ю., Котин В.А. *Резонансные эффекты при движении с малой тягой в системе Земля-Луна*. Космич. исследования, 1987, т.25, № 3, с.374.
27. Константинов М.С. *Методы математического программирования в проектировании летательных аппаратов*. М., Машиностроение, 1975.
28. Константинов М.С. *Синтез оптимального управления при плоском многовитковом перелете между околокруговыми орбитами с трансверсальным ускорением*. Труды 6-й Всесоюзной конференции по управлению в механических системах. Львов, 1988.
29. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П., Безвербый В.К. *Механика космического полета*. М., Машиностроение, 1989.
30. Константинов М.С., Котин В.А. *Об управлении космическим аппаратом с солнечным парусом в окрестности коллинеарных точек либрации*. В сб.: Труды 7-х Чтений Ф.А.Цандера. Идеи Ф.А.Цандера и вопросы астродинамики. М., ИИЕТ АН СССР, 1982.
31. Константинов М.С., Никифоров А.Н. *К вопросу использования посторонних гравитационных полей при перелетах с двигателями малой тяги*. В сб.: Труды 3-х Чтений Ф.А.Цандера. Астродинамика. М., ИИЕТ АН СССР, 1975.

32. Константинов М.С., Федотов Г.Г. *Алгоритм коррекции программного движения аппарата с двигателем малой тяги*. В кн.: "Ф.А.Цандер и современная космонавтика", М., Наука, 1976.
33. Константинов, В.Г.Петухов, Г.Г.Федотов. *Проектирование оптимальных траекторий КА с двигателем ограниченной мощности и с комбинированной ядерно-солнечной энергетической установкой*. Труды XIX Объединенных Научных Чтений по космонавтике, секция "Прикладная небесная механика и управление движением". ИИЕТ РАН, Москва, 1995, с.3.
34. Котин В.А. Оценка предельной скорости захвата аппарата с малой тягой на орбиту спутника. В сб.: "Механика космического полета". М.: Изд.-во МАИ, 1985, с. 69.
35. Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления*. М.: Наука, 1973.
36. Куницын А.Л., Чудаков В.И. *О стационарных движениях в обобщенной задаче трех тел при использовании до полного реактивного ускорения* // Сб. научных трудов МАИ "Прикладная небесная баллистика и проектирование космических аппаратов", М., Издательство МАИ, 1989, с. 64-68.
37. Лебедев В.Н. *Расчет движения космического аппарата с малой тягой*. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
38. Лейтман Дж. (ред.) *Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета*. М.: Наука, 1965.
39. Лидов М.Л. *Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел*. Искусственные спутники Земли, 1961, вып. 8, с.5.
40. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А., Маркеев А.П. *Теория пассивного движения космического аппарата вблизи коллинеарной точки либрации L_2 системы Земля-Луна*. Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР, № 56, 1975.
41. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. *Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной точки L_2 : 1. Предварительный анализ схемы запуска и управления на галоорбите*. Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР, № 116, 1974.
42. Лоуден Д.Ф. *Оптимальные траектории для космической навигации*. М.: Мир, 1966.
43. Маркеев А.П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*. М.: Наука, 1978.
44. *Миссия к Плутону. Баллистика, средства выведения*. Отчет НИЦ им. Г.Н.Бабакина и ИКИ РАН, часть 2. М.: 1994.

45. На Ц. *Вычислительные методы решения прикладных граничных задач*. М.: Мир, 1982.
46. Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*. М.: Мир, 1975.
47. Охоцимский Д.Е. *Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения*. Космич. исследования, т. 2, № 6, 1964.
48. Петухов В.Г. *Аналитическое решение задачи оптимального управления относительным движением космических аппаратов с идеально регулируемыми двигателями малой тяги и его приложение к задаче Хилла*. Труды XXVIII Научных Чтений К.Э.Циолковского, секция "Механика космического полета", ИИЕиТ РАН, Москва, 1994, с.47-54.
49. Петухов В.Г. *Качественное исследование движения космического аппарата с малой тягой в возмущенной задаче Хилла*. В сб.: Вопросы формирования орбит межпланетного перелета и припланетного маневрирования. М., Изд.-во МАИ, 1988, с. 36.
50. Петухов В.Г. *Новый аналитический метод оптимизации многовитковых траекторий перелета КА с идеально регулируемым двигателем малой тяги*. Труды XVII Объединенных Научных Чтений по космонавтике, секция "Прикладная небесная механика и управление движением". ИИЕТ РАН, Москва, 1994, с.11.
51. Петухов В.Г. *Резонансное движение космического аппарата с малой тягой в плоской задаче Хилла*. В сб.: Прикладная небесная баллистика и управление движением. М., Изд.-во МАИ, 1989.
52. Петухов В.Г. *Эволюция орбит в двукратно осредненной задаче Хилла под влиянием малого трансверсального ускорения*. Космич. исследования, 1989, т. 27, N 3, с. 339.
53. Поляхова Е.Н. *Космический полет с солнечным парусом*. М.: Наука, 1986.
54. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука, 1976.
55. Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики*. Избр. труды, т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.
56. Решетнев М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.А., Малышев В.В. *Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах*. М.: Машиностроение, 1988.
57. Ричардсон П.Б. (ред.) *Современное состояние механики космического полета*. М.: Наука, 1969.

58. Рускол Е.Л. *Естественные спутники планет*. “Итоги науки и техники”, серия “Астрономия”, т. 28. М.: ВИНТИ, 1986.
59. Салмин В.В. *Оптимизация космических перелетов с малой тягой*. М.: Машиностроение, 1987.
60. Сафранович В.Ф., Эмдин Л.М. *Маршевые двигатели космических аппаратов*. М.: Машиностроение, 1980.
61. Себехей В. *Теория орбит. Ограниченная задача трех тел*. М.: Наука, 1982.
62. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. *Об устойчивости коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел*. В сб.: “Некоторые задачи и методы исследования динамики механических систем”. М.: Изд-во МАИ, 1985, с. 26.
63. Субботин М.Ф. *Введение в теоретическую астрономию*. М.: Наука, 1968.
64. Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*. М.: Наука, 1967.
65. Федотов Г.Г. *Оптимальные траектории маневров на круговой орбите с выключениями двигателя*. В кн.: Идеи Ф.А.Цандера и развитие ракетно-космической науки и техники. М., Наука, 1983.
66. Федотов Г.Г. *Синтез закона корректирующего управления для аппарата с малой тягой, совершающего полет в поле двух гравитационных центров*. В сб.: Труды 8-х Чтений К.Э.Циолковского, М., ИИЕТ АН СССР, 1975.
67. Химмельблау Д. *Прикладное нелинейное программирование*. М.: Мир, 1975.
68. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. *Методы анализа нелинейных динамических моделей*. М.: Мир, 1991.
69. Хофер Э., Лундерштедт Р. *Численные методы оптимизации*. М.: Машиностроение, 1981.
70. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. *Управление колебаниями*. М.: Наука, 1980.
71. Штифель Е., Шейфеле Г. *Линейная и регулярная небесная механика*. М.: Наука, 1975.
72. Эльясберг П.Е., Тимохова Т.А. *Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарного центра либрации в ограниченной эллиптической задаче трех тел*. Космич. исследования, т.24, № 4, 1986, с. 497.
73. Энеев Т.М. *О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления*. Космич. исследования, т.4, № 5, 1966.
74. Andreev P.V., Fedotov G.G., Galkin A.Y., Gryaznov G.M., Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Zaritsky G.A., Zhabotinsky E.E.. *Associated*

- optimization of the low-thrust trajectory and parameters of the nuclear power plant.* Paper IEPC-95-214, Moscow, September 1995.
75. Arkhipov B., Belik A., Fedotov G., Gryaznov G., Kim V., Konstantinov M., Kuzin A., Khoromsky I., Malyshev G., Menshikov V., Myagkov K., Petukhov V., Popov G., Zharitsky G., Yakovlev B. *Orbit Raising Capabilities of the Power Propulsion system on the Basis of Prospective Nuclear or Solar Power Supply Source and Stationary Plasma Thrusters.* Paper IAF-95-S.3.06, Oslo, October 1995.
 76. Bober A. et al. *State of Work on Electrical Thrusters in USSR.* IEPC-91-003, 1991.
 77. Белецкий В.В. *О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения.* Космич. исследования, т.2, № 3, 1964.
 78. Colasurdo G., Pastrone D., Casalino L. *Optimal Transfer to Non-Coplanar Geostationary Orbit.* Paper IAF-94-A.5.044, Jerusalem, 1994.
 79. Dusek H.M. *Motion in Vicinity of Libration Points of Generalized Restricted Three Body Model*//AIAA Paper 65-682, 1965.
 80. Eneev T.M., Evdokimov K.V., Fedotov G.G. et al. *Pluto tracking: SNEP-Rendezvous with Pluto Using Jupiter Swingby*, Addition to Final Report on Contract "Connep" by RIAME/MAI for DARA, Moscow, May 1995.
 81. Euler L. *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum.* Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, t.11, p.144.
 82. Everhart E. *Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits.* Celestial Mechanics, 1974, v.10, p.35.
 83. Fedotov G.G., Konstantinov M.S., Latyshev L.A., Petukhov V.G., Popov G.A. *Application of stationary plasma thrusters M100-M290 to Pluto fast flyby mission.* Paper IAF-94-S.3.418, Jerusalem, October 1994.
 84. Fedotov G.G., Konstantinov M.S., Petukhov V.G. *Application of the Power-Limited Problem to the Electric Propulsion Mission Design.* Moscow: IEPC-95-220, 1995.
 85. Fedotov G.G., Konstantinov M.S., Petukhov V.G. *Design of solar-powered low thrust Pluto flyby trajectories.* Paper IAF-94-A.6.053, Jerusalem, October 1994.
 86. Fedotov G.G., Konstantinov M.S., Petukhov V.G., Popov G.A.. *Low-cost electric propulsion mission to the near-Earth asteroids.* Paper IAF-95-A.6.07, Oslo, October 1995.
 87. Gobetz F.W. *Optimal Variable-Thrust Transfer of a Power-Limited Rocket between Neighboring Circular Orbits.* AIAA J., v.2, N 2, 1964.
 88. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations. I. Nonstiff Problems.* Berlin: Springer-Verlag, 1987.

89. Haissig C.M., Mease K.D., Vinh N.X. *Minimum-Fuel Power-Limited Transfers between Coplanar Elliptical Orbits*. Paper IAF-91-346, Montreal, 1991.
90. Joint Study Group: *Advanced Interplanetary Missions Using Nuclear-Electric Propulsion. Study Report*. 1st Institute of Physics, University of Giessen. Giessen, Germany, June 1995 to be presented in Bonn, Moscow, Paris.
91. Konstantinov M.S. *Asymptotic methods for low thrust transfer optimization*. Book of Papers of 3rd Russian-German Conference on Electric Propulsion Engines and Their Technical Applications, July 1994, pp. S13-S15.
92. Konstantinov M.S. *Estimate of the Optimal Mercury-Rendezvous Low-Thrust Trajectory with Venus Swingby*. Moscow: IEPC-95-213, 1995.
93. Konstantinov M.S. *Transversal low thrust transfer between near circular planar orbits of satellite system*. Paper IAF-91-350, Montreal, 1991.
94. Konstantinov M.S., Popov G.A., Loeb H.W.. *Electric-propulsion for a Mercury landing mission*. Paper IAF-95-S.3.03, Oslo, October 1995.
95. Konstantinov M.S., Latyshev L.A., Popov G.A., Eneev T.M. *Small spacecraft using electrorocket thrusters for exploring distant planets and asteroids*. Paper IAA-L-OZOP, International Conference IAA "Low-Cost Planetary Missions", Washington, April 1994.
96. Lagrange J.L. *Eassais sur le probleme des trois corps*. Paris, 1772.
97. Marec, J.P. *Optimal Space Trajectories*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., 1979.
98. Melbourne W.G., Sauer C.G. *Optimum Interplanetary Rende Vous with Power-Limited Vehicles*. AIAA J., v.1, N 1, 1963.
99. Muhonen D., Folta D. *Accelerometer - enhanced trajectory control for the ISEE-3 halo orbit*//J. of Astronautical Sciences, 1985, v.33, No 3, 289-300.
100. Nakano M., Ishijima Y., Arakawa Y. *Interplanetary Trajectory Optimization Codes for Electric Propulsion Research*. Paper IEPC-95-215, Moscow, 1995.
101. Petukhov V.G. *Application of electric propulsion system for research of natural satellites*. Paper IAF-91-338, Montreal, 1991.
102. Petukhov V.G. *One Numerical Method to Calculate Optimal Power-Limited Trajectories*. Moscow: IEPC-95-221, 1995.
103. Petukhov V.G. *Orbital Evolution due to Low Thrust in the Restricted Problem of Three Body*. Proc. of 3rd Russian-German Conference on Electric Propulsion Engines and Their Technical Applications, July 19-23, 1994 Stuttgart, Germany, p. S16.
104. Reinboldt W.C. *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*. John Willey, New York, 1986.

105. Rishikof B.H., McCormic B.R., Pritchard R.E., Sponaugle S.J. *SeGRAM: A Practical and Versatile Tool for Spacecraft Trajectory Optimization*. Paper IAF-91-347, Montreal, 1991.
106. Roose D., De Dier B., Spence A. (eds.) *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1990.
107. Wacker H. (ed.) *Continuation Methods*. Academic Press, New York, 1970.
108. Zakharov Y.A. *Optimization of Orbital Transfers and Interplanetary Missions with Electric Propulsion*. Paper IEPC-95-222, Moscow, 1995.